

Linear Map of D -Algebra

Aleks Kleyn

Aleks_Kleyn@MailAPS.org
<http://AleksKleyn.dyndns-home.com:4080/>
<http://sites.google.com/site/AleksKleyn/>
http://arxiv.org/a/kleyn_a_1
<http://AleksKleyn.blogspot.com/>

ABSTRACT. Module is effective representation of ring in Abelian group. Linear map of module over commutative ring is morphism of corresponding representation. This definition is the main subject of the book.

To consider this definition from more general point of view I started the book from consideration of Cartesian product of representations. Polymorphism of representations is a map of Cartesian product of representations which is a morphism of representations with respect to each separate independent variable. Reduced morphism of representations allows us to simplify the study of morphisms of representations. However a representation has to satisfy specific requirements for existence of reduced polymorphism of representations. It is possible that Abelian group is only Ω -algebra, such that representation in this algebra admits polymorphism of representations. However, today, this statement has not been proved.

Multiplicative Ω -group is Ω -algebra in which product is defined. The definition of tensor product of representations of Abelian multiplicative Ω -group is based on properties of reduced polymorphism of representations of Abelian multiplicative Ω -group.

Since algebra is a module in which the product is defined, then we can use this theory to study linear map of algebra. For instance, we can study the set of linear transformations of D -algebra A as representation of algebra $A \otimes A$ in algebra A .

Contents

Chapter 1. Preface	5
1.1. Preface to Version 1	5
1.2. Preface to Version 2	5
1.3. Conventions	6
Chapter 2. Product of Representations	9
2.1. Cartesian Product of Universal Algebras	9
2.2. Cartesian Product of Representations	12
2.3. Reduced Cartesian Product of Representations	16
Chapter 3. Tensor Product of Representations	21
3.1. Polymorphism of Representations	21
3.2. Congruence	26
3.3. Tensor Product of Representations	29
3.4. Associativity of Tensor Product	35
Chapter 4. D -Module	37
4.1. Module over Commutative Ring	37
4.2. Linear Map of D -Module	40
4.3. Polylinear Map of D -Module	43
4.4. D -module $\mathcal{L}(D; A \rightarrow B)$	46
4.5. Tensor Product of D -Modules	48
Chapter 5. D -Algebra	51
5.1. Algebra over Commutative Ring	51
5.2. Linear Homomorphism	54
5.3. Linear Automorphism of Quaternion Algebra	57
Chapter 6. Linear Map of Algebra	61
6.1. Linear Map of Algebra	61
6.2. Algebra $\mathcal{L}(D; A \rightarrow A)$	64
6.3. Linear Map into Associative Algebra	66
6.4. Linear Map into Free Finite Dimensional Associative Algebra	69
6.5. Linear Map into Nonassociative Algebra	74
6.6. Polylinear Map into Associative Algebra	76
6.7. Polylinear Map into Free Finite Dimensional Associative Algebra	81
References	85
Index	86

Special Symbols and Notations	87
---	----

CHAPTER 1

Preface

1.1. Preface to Version 1

There exist few equivalent definitions of module. For me, the definition of module as effective representation of commutative ring in Abelian group is the most interesting definition. This definition allows us to consider linear algebra from more general point of view and to understand which construction can be properly defined in other algebraic theories. For instance, we may consider a linear map as morphism of representation, i.e. a map which preserves the structure of the representation.

The module in which the product is defined is called algebra. Depending on the problem to be solved, we consider different algebraic structures on algebra. Accordingly, the map, which preserves the structure of algebra, changes.

If we do not consider the representation of ring D in D -algebra A , then the algebra A is a ring. A map, preserving the structure of algebra as a ring, is called homomorphism of algebra. If we do not consider the product D -algebra A , then we consider D -algebra as module. A map, preserving the structure of algebra as module, is called a linear map of the D -algebra. Linear map is important tool to study calculus. A map, preserving the structure of representation, is called a linear homomorphism. In the section 5.3, I proved the existence of a nontrivial linear homomorphism.

February, 2015

1.2. Preface to Version 2

The main idea of this book is an attempt to apply to the representation of Ω_1 -algebra (which is called Ω_1 -algebra of transformations of Ω_2 -algebra or just Ω_1 -algebra of transformations) some of concepts with which we are familiar in linear algebra. Since linear map is reduced morphism of module when we consider module as representation of ring in Abelian group, then the definition of polymorphism of representations is natural generalization of polylinear map.

Studying the linear map over non commutative division ring D , we conclude that in the equation

$$f(ax) = af(x)$$

a cannot be any element of the ring D , but should belong to the center of the ring D . This statement makes theory of linear maps interesting and rich theory.

So, like in case of polylinear map, we request that transformation which Ω_1 -algebra generates in one factor, can be transferred to any other factor. In general, this requirement is not restrictive; but compliance with this requirement allows consideration of Ω_1 -algebra of transformations as Abelian multiplicative Ω_1 -group.

Tensor product of vector spaces is associative. Consideration of associativity of tensor product of representation generates new constraint on polymorphism of representations. Any two operations of Ω_2 -algebra must satisfy the equation (3.1.19). It is possible that Abelian group is only Ω_2 -algebra, such that representation in this algebra admits polymorphism of representations. However, today, this statement has not been proved.

If we believe in a statement which we cannot prove or disprove, then discovery of opposite statement may lead us to interesting discoveries. For thousands of years mathematicians tried to prove Euclid's fifth postulate. Lobachevsky and Bolyai proved that there exists geometry which does not hold this postulate. Mathematicians tried to find solution of algebraic equation using radicals. However Galois proved this is impossible to do when the power of equation is greater than 4.

For long time, I believed that existence of reduced morphism of representation imply existence of reduced polymorphism of representation. The theorem 3.1.13 was a surprise to me.

I believe that text about polymorphism and tensor product of representations is important.

- After writing of few papers dedicated to calculus over Banach algebra, I believed that one day I will be able to write similar paper about calculus in a representation. I was confused by the need to refuse addition as estimate how small is distance between maps. Of course, I may state that morphism of representation is in neighborhood of a considered map. However addition is an essential component of the construction. Absence of reduced polymorphism deprive me of the opportunity to define derivatives of second order.
- We can consider linear and polylinear maps of effective representation in Abelian Ω_2 -group like we consider linear and polylinear maps of D -algebra. The structure of linear map of effective representation in Abelian Ω_2 -group is more complicated than the structure of linear map of D -algebra. However this problem is interesting for me and I hope to return to this problem in the future.

May, 2015

1.3. Conventions

CONVENTION 1.3.1. *We will use Einstein summation convention in which repeated index (one above and one below) implies summation with respect to repeated index. In this case we assume that we know the set of summation index and do not use summation symbol*

$$c^i v_i = \sum_{i \in I} c^i v_i$$

□

CONVENTION 1.3.2. *I assume sum over index i in expression like*

$$a_{i,0} x a_{i,1}$$

□

CONVENTION 1.3.3. *Let A be free algebra with finite or countable basis. Considering expansion of element of algebra A relative basis \bar{e} we use the same root*

letter to denote this element and its coordinates. In expression a^2 , it is not clear whether this is component of expansion of element a relative basis, or this is operation $a^2 = aa$. To make text clearer we use separate color for index of element of algebra. For instance,

$$a = a^i e_i$$

□

CONVENTION 1.3.4. If free finite dimensional algebra has unit, then we identify the vector of basis e_0 with unit of algebra.

□

CHAPTER 2

Product of Representations

2.1. Cartesian Product of Universal Algebras

DEFINITION 2.1.1. Let \mathcal{A} be a category. Let $\{B_i, i \in I\}$ be the set of objects of \mathcal{A} . Object

$$P = \prod_{i \in I} B_i$$

and set of morphisms

$$\{ f_i : P \longrightarrow B_i, i \in I \}$$

is called a **product of objects** $\{B_i, i \in I\}$ in category \mathcal{A} ^{2.1} if for any object R and set of morphisms

$$\{ g_i : R \longrightarrow B_i, i \in I \}$$

there exists a unique morphism

$$h : R \longrightarrow P$$

such that diagram

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{f_i} & B_i \\ h \uparrow & \nearrow g_i & \\ R & & \end{array} \quad f_i \circ h = g_i$$

is commutative for all $i \in I$.

If $|I| = n$, then we also will use notation

$$P = \prod_{i=1}^n B_i = B_1 \times \dots \times B_n$$

for product of objects $\{B_i, i \in I\}$ in \mathcal{A} . □

EXAMPLE 2.1.2. Let \mathcal{S} be the category of sets.^{2.2} According to the definition 2.1.1, Cartesian product

$$A = \prod_{i \in I} A_i$$

of family of sets $(A_i, i \in I)$ and family of projections on the i -th factor

$$p_i : A \rightarrow A_i$$

are product in the category \mathcal{S} . □

^{2.1}I made definition according to [1], page 58.

^{2.2}See also the example in [1], page 59.

THEOREM 2.1.3. *The product exists in the category \mathcal{A} of Ω -algebras. Let Ω -algebra A and family of morphisms*

$$p_i : A \rightarrow A_i \quad i \in I$$

be product in the category \mathcal{A} . Then

2.1.3.1: *The set A is Cartesian product of family of sets $(A_i, i \in I)$*

2.1.3.2: *The homomorphism of Ω -algebra*

$$p_i : A \rightarrow A_i$$

is projection on i -th factor.

2.1.3.3: *We can represent any A -number a as tuple $(p_i(a), i \in I)$ of A_i -numbers.*

2.1.3.4: *Let $\omega \in \Omega$ be n -ary operation. Then operation ω is defined componentwise*

$$(2.1.1) \quad a_1 \dots a_n \omega = (a_{1i} \dots a_{ni} \omega, i \in I)$$

where $a_1 = (a_{1i}, i \in I)$, ..., $a_n = (a_{ni}, i \in I)$.

PROOF. Let

$$A = \prod_{i \in I} A_i$$

be Cartesian product of family of sets $(A_i, i \in I)$ and, for each $i \in I$, the map

$$p_i : A \rightarrow A_i$$

be projection on the i -th factor. Consider the diagram of morphisms in category of sets \mathcal{S}

$$(2.1.2) \quad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{p_i} & A_i \\ \omega \uparrow & \nearrow g_i & \\ A^n & & \end{array} \quad p_i \circ \omega = g_i$$

where the map g_i is defined by the equation

$$g_i(a_1, \dots, a_n) = p_i(a_1) \dots p_i(a_n) \omega$$

According to the definition 2.1.1, the map ω is defined uniquely from the set of diagrams (2.1.2)

$$(2.1.3) \quad a_1 \dots a_n \omega = (p_i(a_1) \dots p_i(a_n) \omega, i \in I)$$

The equation (2.1.1) follows from the equation (2.1.3). \square

DEFINITION 2.1.4. *If Ω -algebra A and family of morphisms*

$$p_i : A \rightarrow A_i \quad i \in I$$

*is product in the category \mathcal{A} , then Ω -algebra A is called **direct or Cartesian product of Ω -algebras** $(A_i, i \in I)$.* \square

THEOREM 2.1.5. *Let set A be Cartesian product of sets $(A_i, i \in I)$ and set B be Cartesian product of sets $(B_i, i \in I)$. For each $i \in I$, let*

$$f_i : A_i \rightarrow B_i$$

be the map from the set A_i into the set B_i . For each $i \in I$, consider commutative diagram

$$(2.1.4) \quad \begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{p'_i} & B_i \\ f \uparrow & & \uparrow f_i \\ A & \xrightarrow{p_i} & A_i \end{array}$$

where maps p_i, p'_i are projection on the i -th factor. The set of commutative diagrams (2.1.4) uniquely defines map

$$f : A_1 \rightarrow A_2$$

$$f(a_i, i \in I) = (f_i(a_i), i \in I)$$

PROOF. For each $i \in I$, consider commutative diagram

$$(2.1.5) \quad \begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{p'_i} & B_i \\ \uparrow f & (1) \nearrow g_i & \uparrow f_i \\ A & \xrightarrow{p_i} & A_i \end{array}$$

Let $a \in A$. According to the statement 2.1.3.3, we can represent A -number a as tuple of A_i -numbers

$$(2.1.6) \quad a = (a_i, i \in I) \quad a_i = p_i(a) \in A_i$$

Let

$$(2.1.7) \quad b = f(a) \in B$$

According to the statement 2.1.3.3, we can represent B -number b as tuple of B_i -numbers

$$(2.1.8) \quad b = (b_i, i \in I) \quad b_i = p'_i(b) \in B_i$$

From commutativity of diagram (1) and from equations (2.1.7), (2.1.8), it follows that

$$(2.1.9) \quad b_i = g_i(b)$$

From commutativity of diagram (2) and from the equation (2.1.6), it follows that

$$b_i = f_i(a_i)$$

□

THEOREM 2.1.6. Let Ω -algebra A be Cartesian product of Ω -algebras $(A_i, i \in I)$ and Ω -algebra B be Cartesian product of Ω -algebras $(B_i, i \in I)$. For each $i \in I$, let the map

$$f_i : A_i \rightarrow B_i$$

be homomorphism of Ω -algebra. Then the map

$$f : A \rightarrow B$$

defined by the equation

$$(2.1.10) \quad f(a_i, i \in I) = (f_i(a_i), i \in I)$$

is homomorphism of Ω -algebra.

PROOF. Let $\omega \in \Omega$ be n-ary operation. Let $a_1 = (a_{1i}, i \in I)$, ..., $a_n = (a_{ni}, i \in I)$, $b_1 = (b_{1i}, i \in I)$, ..., $b_n = (b_{ni}, i \in I)$. From equations (2.1.1), (2.1.10), it follows that

$$\begin{aligned} f(a_1 \dots a_n \omega) &= f(a_{1i} \dots a_{ni} \omega, i \in I) \\ &= (f_i(a_{1i} \dots a_{ni} \omega), i \in I) \\ &= ((f_i(a_{1i})) \dots (f_i(a_{ni}))), i \in I) \\ &= (b_{1i} \dots b_{ni} \omega, i \in I) \\ f(a_1) \dots f(a_n) \omega &= b_{1i} \dots b_{ni} \omega = (b_{1i} \dots b_{ni} \omega, i \in I) \end{aligned}$$

□

2.2. Cartesian Product of Representations

LEMMA 2.2.1. Let

$$A = \prod_{i \in I} A_i$$

be Cartesian product of family of Ω_2 -algebras $(A_i, i \in I)$. For each $i \in I$, let the set *A_i be Ω_2 -algebra. Then the set

$$(2.2.1) \quad {}^\circ A = \{f \in {}^*A : f(a_i, i \in I) = (f_i(a_i), i \in I)\}$$

is Cartesian product of Ω_2 -algebras *A_i .

PROOF. According to the definition (2.2.1), we can represent a map $f \in {}^\circ A$ as tuple

$$f = (f_i, i \in I)$$

of maps $f_i \in {}^*A_i$. According to the definition (2.2.1),

$$(f_i, i \in I)(a_i, i \in I) = (f_i(a_i), i \in I)$$

Let $\omega \in \Omega_2$ be n-ary operation. We define operation ω on the set ${}^\circ A$ using equation

$$((f_{1i}, i \in I) \dots (f_{ni}, i \in I) \omega)(a_i, i \in I) = ((f_{1i}(a_i)) \dots (f_{ni}(a_i)) \omega, i \in I)$$

□

DEFINITION 2.2.2. Let \mathcal{A}_1 be category of Ω_1 -algebras. Let \mathcal{A}_2 be category of Ω_2 -algebras. We define **category $(\mathcal{A}_1^*)\mathcal{A}_2$ of left-side representations**. Left-side representations of Ω_1 -algebra in Ω_2 -algebra are objects of this category. Morphisms of corresponding representations are morphisms of this category. □

THEOREM 2.2.3. In category $(\mathcal{A}_1^*)\mathcal{A}_2$ there exists product of single transitive left-side representations of Ω_1 -algebra in Ω_2 -algebra.

PROOF. For $j = 1, 2$, let

$$P_j = \prod_{i \in I} B_{ji}$$

be product of family of Ω_j -algebras $\{B_{ji}, i \in I\}$ and for any $i \in I$ the map

$$t_{ji} : P_j \longrightarrow B_{ji}$$

be projection onto factor i . For each $i \in I$, let

$$h_i : B_{1i} \dashrightarrow B_{2i}$$

be single transitive B_{1i} -representation in Ω_2 -algebra B_{2i} .

Let $b_1 \in P_1$. According to the statement 2.1.3.3, we can represent P_1 -number b_1 as tuple of B_{1i} -numbers

$$(2.2.2) \quad b_1 = (b_{1i}, i \in I) \quad b_{1i} = t_{1i}(b_1) \in B_{1i}$$

Let $b_2 \in P_2$. According to the statement 2.1.3.3, we can represent P_2 -number b_2 as tuple of B_{2i} -numbers

$$(2.2.3) \quad b_2 = (b_{2i}, i \in I) \quad b_{2i} = t_{2i}(b_2) \in B_{2i}$$

LEMMA 2.2.4. For each $i \in I$, consider diagram of maps

$$(2.2.4) \quad \begin{array}{ccccc} & & P_2 & \xrightarrow{t_{2i}} & B_{2i} \\ & & & & (1) \\ & \nearrow g & & \nearrow g(b_1) & \\ P_1 & \xrightarrow{t_{1i}} & B_{1i} & \xrightarrow{h_i} & B_{2i} \\ & & & \nearrow h_i(b_{1i}) & \\ & & P_2 & \xrightarrow{t_{2i}} & B_{2i} \end{array}$$

Let map

$$g : P_1 \rightarrow {}^*P_2$$

be defined by the equation

$$(2.2.5) \quad g(b_1) \circ b_2 = (h_i(b_{1i}) \circ b_{2i}, i \in I)$$

Then the map g is single transitive P_1 -representation in Ω_2 -algebra P_2

$$g : P_1 \dashrightarrow P_2$$

The map (t_{1i}, t_{2i}) is morphism of representation g into representation h_i .

PROOF.

2.2.4.1: According to definitions [4]-2.1.1, [4]-2.1.2, the map $h_i(b_{1i})$ is homomorphism of Ω_2 -algebra B_{2i} . According to the theorem 2.1.6, from commutativity of the diagram (1) for each $i \in I$, it follows that the map

$$g(b_1) : P_2 \rightarrow P_2$$

defined by the equation (2.2.5) is homomorphism of Ω_2 -algebra P_2 .

2.2.4.2: According to the definition [4]-2.1.2, the set ${}^*B_{2i}$ is Ω_1 -algebra. According to the lemma 2.2.1, the set ${}^\circ P_2 \subseteq {}^*P_2$ is Ω_1 -algebra.

2.2.4.3: According to the definition [4]-2.1.2, the map

$$h_i : B_{1i} \rightarrow {}^*B_{2i}$$

is homomorphism of Ω_1 -algebra. According to the theorem 2.1.6, the map

$$g : P_1 \rightarrow {}^*P_2$$

defined by the equation

$$g(b_1) = (h_i(b_{1i}), i \in I)$$

is homomorphism of Ω_1 -algebra.

According to statements 2.2.4.1, 2.2.4.3 and to the definition [4]-2.1.2, the map g is P_1 -representation in Ω_2 -algebra P_2 .

Let $b_{21}, b_{22} \in P_2$. According to the statement 2.1.3.3, we can represent P_2 -numbers b_{21}, b_{22} as tuples of B_{2i} -numbers

$$(2.2.6) \quad \begin{aligned} b_{21} &= (b_{21i}, i \in I) & b_{21i} &= t_{2i}(b_{21}) \in B_{2i} \\ b_{22} &= (b_{22i}, i \in I) & b_{22i} &= t_{2i}(b_{22}) \in B_{2i} \end{aligned}$$

According to the theorem [4]-2.1.9, since the representation h_i is single transitive, then there exists unique B_{1i} -number b_{1i} such that

$$b_{22i} = h_i(b_{1i}) \circ b_{21i}$$

According to definitions (2.2.2), (2.2.5), (2.2.6), there exists unique P_1 -number b_1 such that

$$b_{22} = g(b_1) \circ b_{21}$$

According to the theorems [4]-2.1.9, the representation g is single transitive.

From commutativity of diagram (1) and from the definition [4]-2.2.2, it follows that map (t_{1i}, t_{2i}) is morphism of representation g into representation h_i . \odot

Let

$$(2.2.7) \quad d_2 = g(b_1) \circ b_2 \quad d_2 = (d_{2i}, i \in I)$$

From equations (2.2.5), (2.2.7), it follows that

$$(2.2.8) \quad d_{2i} = h_i(b_{1i}) \circ b_{2i}$$

For $j = 1, 2$, let R_j be other object of category \mathcal{A}_j . For any $i \in I$, let the map

$$r_{1i} : R_1 \longrightarrow B_{1i}$$

be morphism from Ω_1 -algebra R_1 into Ω_1 -algebra B_{1i} . According to the definition 2.1.1, there exists a unique morphism of Ω_1 -algebra

$$s_1 : R_1 \longrightarrow P_1$$

such that following diagram is commutative

$$(2.2.9) \quad \begin{array}{ccc} P_1 & \xrightarrow{t_{1i}} & B_{1i} \\ s_1 \uparrow & \searrow r_{1i} & \uparrow \\ R_1 & & \end{array} \quad t_{1i} \circ s_1 = r_{1i}$$

Let $a_1 \in R_1$. Let

$$(2.2.10) \quad b_1 = s_1(a_1) \in P_1$$

From commutativity of the diagram (2.2.9) and statements (2.2.10), (2.2.2), it follows that

$$(2.2.11) \quad b_{1i} = r_{1i}(a_1)$$

Let

$$f : R_1 \dashrightarrow R_2$$

be single transitive R_1* -representation in Ω_2 -algebra R_2 . According to the theorem [4]-2.2.10, a morphism of Ω_2 -algebra

$$r_{2i} : R_2 \longrightarrow B_{2i}$$

such that map (r_{1i}, r_{2i}) is morphism of representations from f into h_i is unique up to choice of image of R_2 -number a_2 . According to the remark [4]-2.2.6, in diagram of maps

$$(2.2.12) \quad \begin{array}{ccccc} & & & & B_{2i} \\ & & & \nearrow h_i & \\ & B_{1i} & & & \\ \nearrow r_{1i} & & & & \nearrow h_i(b_{1i}) \\ R_1 & & & & B_{2i} \\ \searrow f & & & & \searrow r_{2i} \\ & R_2 & & & \\ & \searrow f(a_1) & & & \\ & R_2 & & & \searrow r_{2i} \\ & & & & \end{array} \quad (2)$$

diagram (2) is commutative. According to the definition 2.1.1, there exists a unique morphism of Ω_2 -algebra

$$s_2 : R_2 \longrightarrow P_2$$

such that following diagram is commutative

$$(2.2.13) \quad \begin{array}{ccc} P_2 & \xrightarrow{t_{2i}} & B_{2i} \\ s_2 \uparrow & & \nearrow r_{2i} \\ R_2 & & \end{array} \quad t_{2i} \circ s_2 = r_{2i}$$

Let $a_2 \in R_2$. Let

$$(2.2.14) \quad b_2 = s_2(a_2) \in P_2$$

From commutativity of the diagram (2.2.13) and statements (2.2.14), (2.2.3), it follows that

$$(2.2.15) \quad b_{2i} = r_{2i}(a_2)$$

Let

$$(2.2.16) \quad c_2 = f(a_1) \circ a_2$$

From commutativity of the diagram (2) and equations (2.2.8), (2.2.15), (2.2.16), it follows that

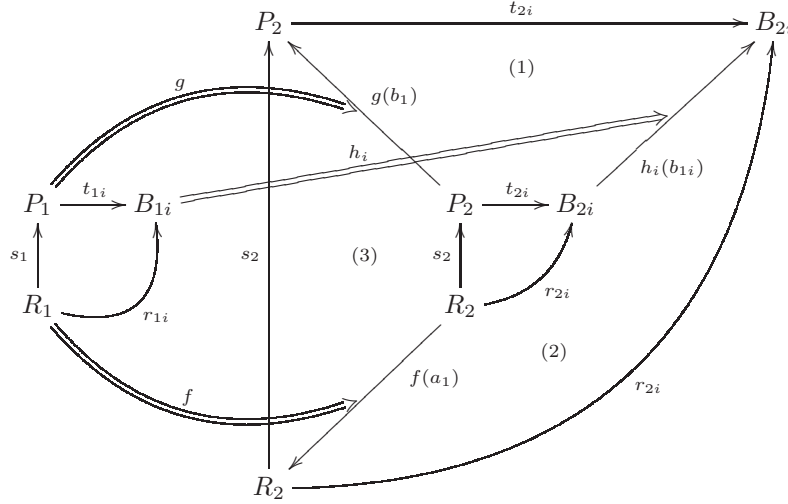
$$(2.2.17) \quad d_{2i} = r_{2i}(c_2)$$

From equations (2.2.8), (2.2.17), it follows that

$$(2.2.18) \quad d_2 = s_2(c_2)$$

and this is consistent with commutativity of the diagram (2.2.13).

For each $i \in I$, we join diagrams of maps (2.2.4), (2.2.9), (2.2.13), (2.2.12)



From equations (2.2.7), (2.2.14) and from equations (2.2.16), (2.2.18), commutativity of the diagram (3) follows. Therefore, the map (s_1, s_2) is morphism of representations from f into g . According to the theorem [4]-2.2.10, the morphism (s_1, s_2) is defined unambiguously, since we require (2.2.18).

According to the definition 2.1.1, the representation g and family of morphisms of representation $((t_{1i}, t_{2i}), i \in I)$ is product in the category $(A_1*)A_2$. \square

2.3. Reduced Cartesian Product of Representations

DEFINITION 2.3.1. Let A_1 be Ω_1 -algebra. Let A_2 be category of Ω_2 -algebras. We define **category $(A_1*)A_2$ of left-side representations**. Left-side representations of Ω_1 -algebra A_1 in Ω_2 -algebra are objects of this category. Reduced morphisms of corresponding representations are morphisms of this category. \square

THEOREM 2.3.2. In category $(A_1*)A_2$ there exists product of effective left-side representations of Ω_1 -algebra A_1 in Ω_2 -algebra and the product is effective left-side representations of Ω_1 -algebra A_1 .

PROOF. Let

$$A_2 = \prod_{i \in I} A_{2i}$$

be product of family of Ω_2 -algebras $\{A_{2i}, i \in I\}$ and for any $i \in I$ the map

$$t_i : A_2 \longrightarrow A_{2i}$$

be projection onto factor i . For each $i \in I$, let

$$h_i : A_1 \longrightarrow A_{2i}$$

be effective A_1 -representation in Ω_2 -algebra A_{2i} .

Let $b_1 \in A_1$. Let $b_2 \in A_2$. According to the statement 2.1.3.3, we can represent A_2 -number b_2 as tuple of A_{2i} -numbers

$$(2.3.1) \quad b_2 = (b_{2i}, i \in I) \quad b_{2i} = t_i(b_2) \in A_{2i}$$

LEMMA 2.3.3. For each $i \in I$, consider diagram of maps

$$(2.3.2) \quad \begin{array}{ccccc} & A_2 & \xrightarrow{t_i} & & A_{2i} \\ & \nearrow g(b_1) & & \searrow h_i(b_1) & \\ A_1 & \xrightarrow{g} & A_2 & \xrightarrow{t_i} & A_{2i} \\ & \searrow h_i & & \nearrow h_i(b_1) & \end{array} \quad (1)$$

Let map

$$g : A_1 \rightarrow {}^*A_2$$

be defined by the equation

$$(2.3.3) \quad g(b_1) \circ b_2 = (h_i(b_1) \circ b_{2i}, i \in I)$$

Then the map g is effective A_1 -representation in Ω_2 -algebra A_2

$$g : A_1 \longrightarrow A_2$$

The map t_i is reduced morphism of representation g into representation h_i .

PROOF.

2.3.3.1: According to definitions [4]-2.1.1, [4]-2.1.2, the map $h_i(b_1)$ is homomorphism of Ω_2 -algebra A_{2i} . According to the theorem 2.1.6, from commutativity of the diagram (1) for each $i \in I$, it follows that the map

$$g(b_1) : A_2 \rightarrow A_2$$

defined by the equation (2.3.3) is homomorphism of Ω_2 -algebra A_2 .

2.3.3.2: According to the definition [4]-2.1.2, the set ${}^*A_{2i}$ is Ω_1 -algebra. According to the lemma 2.2.1, the set ${}^\circ A_2 \subseteq {}^*A_2$ is Ω_1 -algebra.

2.3.3.3: According to the definition [4]-2.1.2, the map

$$h_i : A_1 \rightarrow {}^*A_{2i}$$

is homomorphism of Ω_1 -algebra. According to the theorem 2.1.6, the map

$$g : A_1 \rightarrow {}^*A_2$$

defined by the equation

$$g(b_1) = (h_i(b_1), i \in I)$$

is homomorphism of Ω_1 -algebra.

According to statements 2.3.3.1, 2.3.3.3 and to the definition [4]-2.1.2, the map g is A_1 *-representation in Ω_2 -algebra A_2 .

For any $i \in I$, according to the definition [4]-2.1.6, A_1 -number a_1 generates unique transformation

$$(2.3.4) \quad b_{22i} = h_i(b_1) \circ b_{21i}$$

Let $b_{21}, b_{22} \in A_2$. According to the statement 2.1.3.3, we can represent A_2 -numbers b_{21}, b_{22} as tuples of A_{2i} -numbers

$$(2.3.5) \quad \begin{aligned} b_{21} &= (b_{21i}, i \in I) & b_{21i} &= t_i(b_{21}) \in A_{2i} \\ b_{22} &= (b_{22i}, i \in I) & b_{22i} &= t_i(b_{22}) \in A_{2i} \end{aligned}$$

According to the definition (2.3.3) of the representation g , from equations (2.3.4), (2.3.5), it follows that A_1 -number a_1 generates unique transformation

$$(2.3.6) \quad b_{22} = (h_i(b_1) \circ b_{21i}, i \in I) = g(b_1) \circ b_{21}$$

According to the definition [4]-2.1.6, the representation g is effective.

From commutativity of diagram (1) and from the definition [4]-2.2.2, it follows that map t_i is reduced morphism of representation g into representation h_i . \odot

Let

$$(2.3.7) \quad d_2 = g(b_1) \circ b_2 \quad d_2 = (d_{2i}, i \in I)$$

From equations (2.3.3), (2.3.7), it follows that

$$(2.3.8) \quad d_{2i} = h_i(b_1) \circ b_{2i}$$

Let R_2 be other object of category \mathcal{A}_2 . Let

$$f : A_1 \multimap R_2$$

be effective A_1 *-representation in Ω_2 -algebra R_2 . For any $i \in I$, let there exist morphism

$$r_i : R_2 \longrightarrow A_{2i}$$

of representations from f into h_i . According to the remark [4]-2.2.6, in diagram of maps

$$(2.3.9)$$

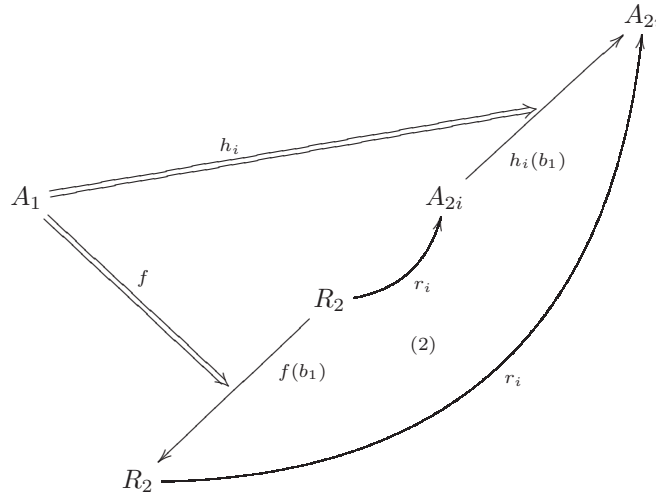


diagram (2) is commutative. According to the definition 2.1.1, there exists a unique morphism of Ω_2 -algebra

$$s : R_2 \longrightarrow A_2$$

such that following diagram is commutative

$$(2.3.10) \quad \begin{array}{ccc} A_2 & \xrightarrow{t_i} & A_{2i} \\ \uparrow s & \searrow r_i & \\ R_2 & & \end{array} \quad t_i \circ s = r_i$$

Let $a_2 \in R_2$. Let

$$(2.3.11) \quad b_2 = s(a_2) \in A_2$$

From commutativity of the diagram (2.3.10) and statements (2.3.11), (2.3.1), it follows that

$$(2.3.12) \quad b_{2i} = r_i(b_2)$$

Let

$$(2.3.13) \quad c_2 = f(a_1) \circ a_2$$

From commutativity of the diagram (2) and equations (2.3.8), (2.3.12), (2.3.13), it follows that

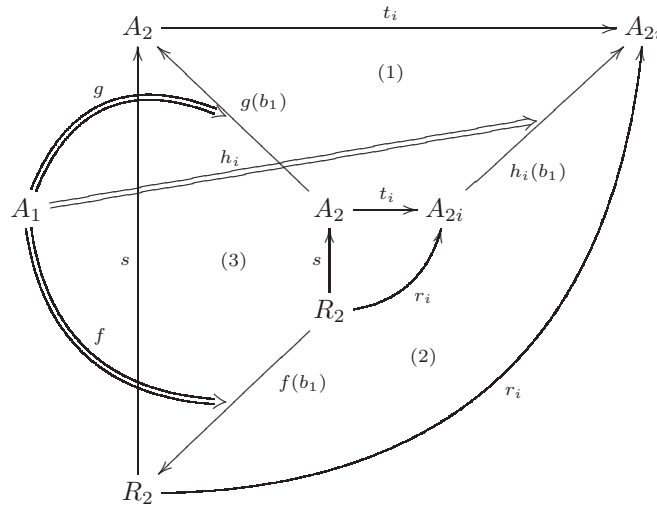
$$(2.3.14) \quad d_{2i} = r_i(c_2)$$

From equations (2.3.8), (2.3.14), it follows that

$$(2.3.15) \quad d_2 = s(c_2)$$

and this is consistent with commutativity of the diagram (2.3.10).

For each $i \in I$, we join diagrams of maps (2.3.2), (2.3.10), (2.3.9)



From equations (2.3.7), (2.3.11) and from equations (2.3.13), (2.3.15), commutativity of the diagram (3) follows. Therefore, the map s is reduced morphism of representations from f into g . According to the remark [4]-2.3.2, the map s is

homomorphism of Ω_2 algebra. According to the theorem 2.1.3 and to the definition 2.1.1, the reduced morphism s is defined unambiguously.

According to the definition 2.1.1, the representation g and family of morphisms of representation $(t_i, i \in I)$ is product in the category $(A_1*)\mathcal{A}_2$. \square

CHAPTER 3

Tensor Product of Representations

3.1. Polymorphism of Representations

DEFINITION 3.1.1. Let A_1, \dots, A_n be Ω_1 -algebras. Let B_1, \dots, B_n, B be Ω_2 -algebras. Let, for any $k, k = 1, \dots, n$,

$$f_k : A_k \dashrightarrow B_k$$

be representation of Ω_1 -algebra A_k in Ω_2 -algebra B_k . Let

$$f : A \dashrightarrow B$$

be representation of Ω_1 -algebra A in Ω_2 -algebra B . The map

$$r : A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow A \quad R : B_1 \times \dots \times B_n \rightarrow B$$

is called **polymorphism of representations** f_1, \dots, f_n into representation f , if, for any $k, k = 1, \dots, n$, provided that all variables except variables $a_k \in A_k, b_k \in B_k$ have given value, the map (r, R) is a morphism of representation f_k into representation f .

If $f_1 = \dots = f_n$, then we say that the map (r, R) is polymorphism of representation f_1 into representation f .

If $f_1 = \dots = f_n = f$, then we say that the map (r, R) is polymorphism of representation f . □

THEOREM 3.1.2. Let the map (r, R) be polymorphism of representations f_1, \dots, f_n into representation f . The map (r, R) satisfies to the equality

$$(3.1.1) \quad R(f_1(a_1)(m_1), \dots, f_n(a_n)(m_n)) = f(r(a_1, \dots, a_n))(R(m_1, \dots, m_n))$$

Let $\omega_1 \in \Omega_1(p)$. For any $k, k = 1, \dots, n$, the map r satisfies to the equality

$$(3.1.2) \quad \begin{aligned} & r(a_1, \dots, a_{k-1} \dots a_{k \cdot p} \omega_1, \dots, a_n) \\ &= r(a_1, \dots, a_{k-1}, \dots, a_n) \dots r(a_1, \dots, a_{k \cdot p}, \dots, a_n) \omega_1 \end{aligned}$$

Let $\omega_2 \in \Omega_2(p)$. For any $k, k = 1, \dots, n$, the map R satisfies to the equality

$$(3.1.3) \quad \begin{aligned} & R(m_1, \dots, m_{k-1} \dots m_{k \cdot p} \omega_2, \dots, m_n) \\ &= R(m_1, \dots, m_{k-1}, \dots, m_n) \dots R(m_1, \dots, m_{k \cdot p}, \dots, m_n) \omega_2 \end{aligned}$$

PROOF. The equality (3.1.1) follows from the definition 3.1.1 and the equality [4]-(2.2.4). The equality (3.1.2) follows from the statement that for any $k, k = 1, \dots, n$, provided that all variables except the variable $x_k \in A_k$ have given value, the map r is homomorphism of Ω_1 -algebra A_k into Ω_1 -algebra A . The equality (3.1.3) follows from the statement that for any $k, k = 1, \dots, n$, provided that all variables

except the variable $m_k \in B_k$ have given value, the map R is homomorphism of Ω_2 -algebra B_k into Ω_2 -algebra B . \square

DEFINITION 3.1.3. Let A, B_1, \dots, B_n, B be universal algebras. Let, for any $k, k = 1, \dots, n$,

$$f_k : A \dashrightarrow B_k$$

be effective representation of Ω_1 -algebra A_k in Ω_2 -algebra B_k . Let

$$f : A \dashrightarrow B$$

be effective representation of Ω_1 -algebra A in Ω_2 -algebra B . The map

$$r_2 : B_1 \times \dots \times B_n \rightarrow B$$

is called **reduced polymorphism of representations** f_1, \dots, f_n into representation f , if, for any $k, k = 1, \dots, n$, provided that all variables except the variable $x_k \in B_k$ have given value, the map R is a reduced morphism of representation f_k into representation f .

If $f_1 = \dots = f_n$, then we say that the map R is reduced polymorphism of representation f_1 into representation f .

If $f_1 = \dots = f_n = f$, then we say that the map R is reduced polymorphism of representation f . \square

THEOREM 3.1.4. Let the map R be reduced polymorphism of effective representations f_1, \dots, f_n into effective representation f . For any $k, k = 1, \dots, n$, the map R satisfies to the equality

$$(3.1.4) \quad R(m_1, \dots, f_k(a) \circ m_k, \dots, m_n) = f(a) \circ R(m_1, \dots, m_n)$$

Let $\omega_2 \in \Omega_2(p)$. For any $k, k = 1, \dots, n$, the map R satisfies to the equality

$$(3.1.5) \quad \begin{aligned} & R(m_1, \dots, m_{k-1} \dots m_{k,p} \omega_2, \dots, m_n) \\ &= R(m_1, \dots, m_{k-1}, \dots, m_n) \dots R(m_1, \dots, m_{k,p}, \dots, m_n) \omega_2 \end{aligned}$$

PROOF. The equality (3.1.4) follows from the definition 3.1.3 and the equality [4]-(2.3.3). The equality (3.1.5) follows from the statement that for any $k, k = 1, \dots, n$, provided that all variables except the variable $m_k \in B_k$ have given value, the map R is homomorphism of Ω_2 -algebra B_k into Ω_2 -algebra B . \square

We also say that the map (r, R) is polymorphism of representations in Ω_2 -algebras B_1, \dots, B_n into representation in Ω_2 -algebra B . Similarly, we say that the map R is reduced polymorphism of representations in Ω_2 -algebras B_1, \dots, B_n into representation in Ω_2 -algebra B .

Comparison of definitions 3.1.1 and 3.1.3 shows that there is a difference between these two forms of polymorphism. This is particularly evident when comparing the difference between equalities (3.1.1) and (3.1.4). If we want to be able to express the reduced polymorphism of representations using polymorphism of representations, then we must require two conditions:

- (1) The representation f of universal algebra contains the identity transformation δ . Therefore, there exists $e \in A$ such that $f(e) = \delta$. Without loss of generality, we assume that the choice of $e \in A$ does not depend on whether we consider the representation f_1, \dots , or f_n .

(2) For any $k, k = 1, \dots, n$,

$$(3.1.6) \quad r(a_1, \dots, a_n) = a_k \quad a_i = e \quad i \neq k$$

Then, provided that $a_i = e, i \neq k$, the equality (3.1.1) has form

$$(3.1.7) \quad R(m_1, \dots, f_k(a_k) \circ m_k, \dots, m_n) = f(r(e, \dots, a_k, \dots, e)) \circ R(m_1, \dots, m_n)$$

It is evident that the equality (3.1.7) coincides with the equality (3.1.4).

A similar problem appears in the analysis of reduced polymorphism of representations. Using the equality (3.1.4), we can write an expression

$$(3.1.8) \quad R(m_1, \dots, f_k(a_k) \circ m_k, \dots, f_l(a_l) \circ m_l, \dots, m_n)$$

either in the following form

$$(3.1.9) \quad \begin{aligned} & R(m_1, \dots, f_k(a_k) \circ m_k, \dots, f_l(a_l) \circ m_l, \dots, m_n) \\ &= f(a_k) \circ R(m_1, \dots, m_k, \dots, f_l(a_l) \circ m_l, \dots, m_n) \\ &= f(a_k) \circ (f(a_l) \circ R(m_1, \dots, m_k, \dots, m_l, \dots, m_n)) \\ &= (f(a_k) \circ f(a_l)) \circ R(m_1, \dots, m_k, \dots, m_l, \dots, m_n) \end{aligned}$$

or in the following form

$$(3.1.10) \quad \begin{aligned} & R(m_1, \dots, f_k(a_k) \circ m_k, \dots, f_l(a_l) \circ m_l, \dots, m_n) \\ &= f(a_l) \circ R(m_1, \dots, f_k(a_k) \circ m_k, \dots, m_l, \dots, m_n) \\ &= f(a_l) \circ (f(a_k) \circ R(m_1, \dots, m_k, \dots, m_l, \dots, m_n)) \\ &= (f(a_l) \circ f(a_k)) \circ R(m_1, \dots, m_k, \dots, m_l, \dots, m_n) \end{aligned}$$

Maps $f(a_k), f(a_l)$ are homomorphisms of Ω_2 -algebra B . Therefore, the map $f(a_k) \circ f(a_l)$ is homomorphism of Ω_2 -algebra B . However, not every Ω_1 -algebra A has such a which depends on a_k and a_l and satisfies to equality

$$f(a) = f(a_k) \circ f(a_l)$$

Since the representation f is single transitive and for any A -numbers a, b there exists A -number c such that

$$(3.1.11) \quad f(c) = f(a) \circ f(b)$$

then the equality (3.1.11) uniquely determines A -number c . Therefore, we can introduce the product

$$c_1 = a_1 * b_1$$

such way that

$$(3.1.12) \quad f(a * b) = f(a) \circ f(b)$$

DEFINITION 3.1.5. *Let product*

$$c_1 = a_1 * b_1$$

be operation of Ω_1 -algebra A . Let $\Omega = \Omega_1 \setminus \{*\}$. For any operation $\omega \in \Omega(p)$, the product is distributive over the operation ω

$$(3.1.13) \quad a * (b_1 \dots b_n \omega) = (a * b_1) \dots (a * b_n) \omega$$

$$(3.1.14) \quad (b_1 \dots b_n \omega) * a = (b_1 * a) \dots (b_n * a) \omega$$

Ω_1 -algebra A is called **multiplicative Ω -group**.^{3.1} □

DEFINITION 3.1.6. Let A, B be multiplicative Ω -groups. The map

$$f : A \rightarrow B$$

is called **multiplicative**, if

$$f(a * b) = f(a) \circ f(b)$$

□

THEOREM 3.1.7. Single transitive representation of multiplicative Ω -group is multiplicative map.

PROOF. Theorem follows from the equality (3.1.12) and from the definition 3.1.6. □

However the statement of the theorem 3.1.7 is not enough to prove equality of expressions (3.1.9) and (3.1.10).

DEFINITION 3.1.8. If

$$(3.1.15) \quad a * b = b * a$$

then multiplicative Ω -group is called **Abelian**. □

THEOREM 3.1.9. Let

$$f : A \dashrightarrow M$$

be effective representation of Abelian multiplicative Ω -group A . Then

$$(3.1.16) \quad \begin{aligned} & f(a_k) \circ (f(a_l) \circ R(m_1, \dots, m_k, \dots, m_l, \dots, m_n)) \\ &= f(a_l) \circ (f(a_k) \circ R(m_1, \dots, m_k, \dots, m_l, \dots, m_n)) \end{aligned}$$

PROOF. From equalities (3.1.9), (3.1.10), (3.1.12), (3.1.15), it follows that

$$(3.1.17) \quad \begin{aligned} & f(a_k) \circ (f(a_l) \circ R(m_1, \dots, m_k, \dots, m_l, \dots, m_n)) \\ &= (f(a_k) \circ f(a_l)) \circ R(m_1, \dots, m_k, \dots, m_l, \dots, m_n) \\ &= f(a_k * a_l) \circ R(m_1, \dots, m_k, \dots, m_l, \dots, m_n) \\ &= f(a_l * a_k) \circ R(m_1, \dots, m_k, \dots, m_l, \dots, m_n) \\ &= (f(a_l) \circ f(a_k)) \circ R(m_1, \dots, m_k, \dots, m_l, \dots, m_n) \\ &= f(a_l) \circ (f(a_k) \circ R(m_1, \dots, m_k, \dots, m_l, \dots, m_n)) \end{aligned}$$

The equality (3.1.16) follows from the equality (3.1.17). □

THEOREM 3.1.10. Let A be Abelian multiplicative Ω -group. Let R be reduced polymorphism of effective representations f_1, \dots, f_n into effective representation f . Then for any $k, l, k = 1, \dots, n, l = 1, \dots, n$,

$$(3.1.18) \quad \begin{aligned} & R(m_1, \dots, f_k(a) \circ m_k, \dots, m_l, \dots, m_n) \\ &= R(m_1, \dots, m_k, \dots, f_l(a) \circ m_l, \dots, m_n) \end{aligned}$$

PROOF. The equality (3.1.18) directly follows from the equality (3.1.4). □

^{3.1} The definition of multiplicative Ω -group is similar to the definition [6]-2.1.3 of Ω -group. However, Ω -group assumes addition as group operation. It is important for us that group operation of multiplicative Ω -group is product. Moreover, operation ω of Ω -group is distributive over sum. In multiplicative Ω -group, product is distributive over operation ω .

THEOREM 3.1.11. *Let*

$$A \xrightarrow{*} B_1 \quad A \xrightarrow{*} B_2 \quad A \xrightarrow{*} B$$

be effective representations of Abelian multiplicative Ω_1 -group A in Ω_2 -algebras B_1, B_2, B . Let Ω_2 -algebra have 2 operations, namely $\omega_1 \in \Omega_2(p), \omega_2 \in \Omega_2(q)$. The equality

$$(3.1.19) \quad (a_{1.1} \dots a_{1.q} \omega_2) \dots (a_{p.1} \dots a_{p.q} \omega_2) \omega_1 = (a_{1.1} \dots a_{p.1} \omega_1) \dots (a_{1.q} \dots a_{p.q} \omega_1) \omega_2$$

is necessary condition of existence of reduced polymorphism

$$R : B_1 \times B_2 \rightarrow B$$

PROOF. Let $a_1, \dots, a_p \in B_1, b_1, \dots, b_q \in B_2$. According to the equality (3.1.5), the expression

$$(3.1.20) \quad R(a_1 \dots a_p \omega_1, b_1 \dots b_q \omega_2)$$

can have 2 values

$$(3.1.21) \quad \begin{aligned} & R(a_1 \dots a_p \omega_1, b_1 \dots b_q \omega_2) \\ &= R(a_1, b_1 \dots b_q \omega_2) \dots R(a_p, b_1 \dots b_q \omega_2) \omega_1 \\ &= (R(a_1, b_1) \dots R(a_1, b_q) \omega_2) \dots (R(a_p, b_1) \dots R(a_p, b_q) \omega_2) \omega_1 \end{aligned}$$

$$(3.1.22) \quad \begin{aligned} & R(a_1 \dots a_p \omega_1, b_1 \dots b_q \omega_2) \\ &= R(a_1 \dots a_p \omega_1, b_1) \dots R(a_1 \dots a_p \omega_1, b_q) \omega_2 \\ &= (R(a_1, b_1) \dots R(a_p, b_1) \omega_1) \dots (R(a_1, b_q) \dots R(a_p, b_q) \omega_1) \omega_2 \end{aligned}$$

From equalities (3.1.21), (3.1.22), it follows that

$$(3.1.23) \quad \begin{aligned} & (R(a_1, b_1) \dots R(a_1, b_q) \omega_2) \dots (R(a_p, b_1) \dots R(a_p, b_q) \omega_2) \omega_1 \\ &= (R(a_1, b_1) \dots R(a_p, b_1) \omega_1) \dots (R(a_1, b_q) \dots R(a_p, b_q) \omega_1) \omega_2 \end{aligned}$$

Therefore, the expression (3.1.20) is properly defined iff the equality (3.1.23) is true. Let

$$(3.1.24) \quad a_{i.j} = R(a_i, b_j) \in A$$

The equality (3.1.19) follows from equalities (3.1.23), (3.1.24). \square

THEOREM 3.1.12. *There exists reduced polymorphism of effective representations of Abelian multiplicative Ω -group in Abelian group.*

PROOF. Since sum in Abelian group is commutative and associative, then the theorem follows from the theorem 3.1.11. \square

THEOREM 3.1.13. *There is no reduced polymorphism of effective representations of Abelian multiplicative Ω -group in ring.*

PROOF. There are two operations in the ring: sum which is commutative and associative and product which is distributive over sum. According to the theorem 3.1.11, the existence of polymorphism of effective representation in the ring implies that sum and product must satisfy the equality

$$(3.1.25) \quad a_{1.1} a_{2.1} + a_{1.2} a_{2.2} = (a_{1.1} + a_{1.2})(a_{2.1} + a_{2.2})$$

However right hand side of the equality (3.1.25) has form

$$\begin{aligned} (a_{1.1} + a_{1.2})(a_{2.1} + a_{2.2}) &= (a_{1.1} + a_{1.2})a_{2.1} + (a_{1.1} + a_{1.2})a_{2.2} \\ &= a_{1.1}a_{2.1} + a_{1.2}a_{2.1} + a_{1.1}a_{2.2} + a_{1.2}a_{2.2} \end{aligned}$$

Therefore, the equality (3.1.25) is not true. \square

QUESTION 3.1.14. *It is possible that polymorphism of representations exists only for effective representation in Abelian group. However, this statement has not been proved.* \square

3.2. Congruence

THEOREM 3.2.1. *Let N be equivalence on the set A . Consider category \mathcal{A} whose objects are maps^{3.2}*

$$f_1 : A \rightarrow S_1 \quad \ker f_1 \supseteq N$$

$$f_2 : A \rightarrow S_2 \quad \ker f_2 \supseteq N$$

We define morphism $f_1 \rightarrow f_2$ to be map $h : S_1 \rightarrow S_2$ making following diagram commutative

$$\begin{array}{ccc} & S_1 & \\ f_1 \nearrow & \downarrow h & \searrow f_2 \\ A & & S_2 \end{array}$$

The map

$$\text{nat } N : A \rightarrow A/N$$

is universally repelling in the category \mathcal{A} .^{3.3}

PROOF. Consider diagram

$$\begin{array}{ccc} & A/N & \\ j=\text{nat } N \nearrow & \downarrow h & \searrow f \\ A & & S \end{array}$$

$$(3.2.1) \quad \ker f \supseteq N$$

From the statement (3.2.1) and the equality

$$j(a_1) = j(a_2)$$

it follows that

$$f(a_1) = f(a_2)$$

^{3.2}The statement of lemma is similar to the statement on p. [1]-119.

^{3.3}See definition of universal object of category in definition on p. [1]-57.

Therefore, we can uniquely define the map h using the equality

$$h(j(b)) = f(b)$$

□

THEOREM 3.2.2. *Let*

$$f : A \multimap B$$

*be representation of Ω_1 -algebra A in Ω_2 -algebra B . Let N be such congruence^{3.4} on Ω_2 -algebra B that any transformation $h \in {}^*B$ is coordinated with congruence N . There exists representation*

$$f_1 : A \multimap B/N$$

of Ω_1 -algebra A in Ω_2 -algebra B/N and the map

$$\text{nat } N : B \rightarrow B/N$$

is reduced morphism of representation f into the representation f_1

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{j} & B/N \\ & \swarrow f^* \quad \searrow f_1^* & \\ & A & \end{array} \quad j = \text{nat } N$$

PROOF. We can represent any element of the set B/N as $j(a)$, $a \in B$.

According to the theorem [9]-II.3.5, there exists a unique Ω_2 -algebra structure on the set B/N . If $\omega \in \Omega_2(p)$, then we define operation ω on the set B/N according to the equality (3) on page [9]-59

$$(3.2.2) \quad j(b_1) \dots j(b_p) \omega = j(b_1 \dots b_p \omega)$$

As well as in the proof of the theorem [4]-2.2.16, we can define the representation

$$f_1 : A \multimap B/N$$

using equality

$$(3.2.3) \quad f_1(a) \circ j(b) = j(f(a) \circ b)$$

We can represent the equality (3.2.3) using diagram

$$(3.2.4) \quad \begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{j} & B/N \\ f(a) \uparrow & & \uparrow f_1(a) \\ B & \xrightarrow{j} & B/N \end{array}$$

Let $\omega \in \Omega_2(p)$. Since the maps $f(a)$ and j are homomorphisms of Ω_2 -algebra, then

$$\begin{aligned} (3.2.5) \quad f_1(a) \circ (j(b_1) \dots j(b_p) \omega) &= f_1(a) \circ j(b_1 \dots b_p \omega) \\ &= j(f(a) \circ (b_1 \dots b_p \omega)) \\ &= j((f(a) \circ b_1) \dots (f(a) \circ b_p) \omega) \\ &= j(f(a) \circ b_1) \dots j(f(a) \circ b_p) \omega \\ &= (f_1(a) \circ j(b_1)) \dots (f_1(a) \circ j(b_p)) \omega \end{aligned}$$

^{3.4}See the definition of congruence on p. [9]-57.

From the equality (3.2.5), it follows that the map $f_1(a)$ is homomorphism of Ω_2 -algebra. From the equality (3.2.3) and from the [4]-2.3.2, it follows that the map j is reduced morphism of the representation f into the representation f_1 . \square

THEOREM 3.2.3. *Let*

$$f : A \multimap B$$

*be representation of Ω_1 -algebra A in Ω_2 -algebra B . Let N be such congruence on Ω_2 -algebra B that any transformation $h \in {}^*B$ is coordinated with congruence N . Consider category \mathcal{A} whose objects are reduced morphisms of representations^{3.5}*

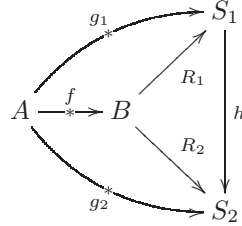
$$R_1 : B \rightarrow S_1 \quad \ker R_1 \supseteq N$$

$$R_2 : B \rightarrow S_2 \quad \ker R_2 \supseteq N$$

where S_1, S_2 are Ω_2 -algebras and

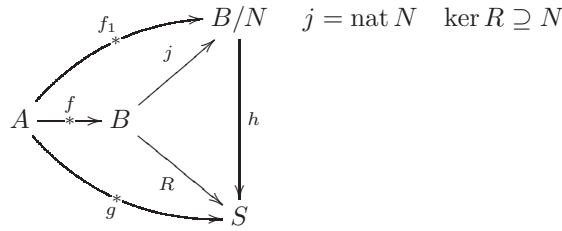
$$g_1 : A \multimap S_1 \quad g_2 : A \multimap S_2$$

are representations of Ω_1 -algebra A . We define morphism $R_1 \rightarrow R_2$ to be reduced morphism of representations $h : S_1 \rightarrow S_2$ making following diagram commutative



The reduced morphism $\text{nat } N$ of representation f into representation f_1 (the theorem 3.2.2) is universally repelling in the category \mathcal{A} .^{3.6}

PROOF. From the theorem 3.2.1, it follows that there exists and unique the map h for which the following diagram is commutative



Therefore, we can uniquely define the map h using equality

$$(3.2.6) \quad h(j(b)) = R(b)$$

^{3.5}The statement of lemma is similar to the statement on p. [1]-119.

^{3.6}See definition of universal object of category in definition on p. [1]-57.

Let $\omega \in \Omega_2(p)$. Since maps R and j are homomorphisms of Ω_2 -algebra, then

$$\begin{aligned}
 h(j(b_1) \dots j(b_p)\omega) &= h(j(b_1 \dots b_p)\omega) \\
 &= R(b_1 \dots b_p)\omega \\
 &= R(b_1) \dots R(b_p)\omega \\
 &= h(j(b_1)) \dots h(j(b_p))\omega
 \end{aligned}
 \tag{3.2.7}$$

From the equality (3.2.7), it follows that the map h is homomorphism of Ω_2 -algebra.

Since the map R is reduced morphism of the representation f into the representation g , then the following equality is satisfied

$$g(a)(R(b)) = R(f(a)(b)) \tag{3.2.8}$$

From the equality (3.2.6) it follows that

$$g(a)(h(j(b))) = g(a)(R(b)) \tag{3.2.9}$$

From the equalities (3.2.8), (3.2.9) it follows that

$$g(a)(h(j(b))) = R(f(a)(b)) \tag{3.2.10}$$

From the equalities (3.2.6), (3.2.10) it follows that

$$g(a)(h(j(b))) = h(j(f(a)(b))) \tag{3.2.11}$$

From the equalities (3.2.3), (3.2.11) it follows that

$$g(a)(h(j(b))) = h(f_1(a)(j(b))) \tag{3.2.12}$$

From the equality (3.2.12) it follows that the map h is reduced morphism of representation f_1 into the representation g . \square

3.3. Tensor Product of Representations

DEFINITION 3.3.1. Let A be Abelian multiplicative Ω_1 -group. Let B_1, \dots, B_n be Ω_2 -algebras.^{3.7} Let, for any $k, k = 1, \dots, n$,

$$f_k : A \dashrightarrow B_k$$

be effective representation of multiplicative Ω_1 -group A in Ω_2 -algebra B_k . Consider category \mathcal{A} whose objects are reduced polymorphisms of representations f_1, \dots, f_n

$$r_1 : B_1 \times \dots \times B_n \longrightarrow S_1 \quad r_2 : B_1 \times \dots \times B_n \longrightarrow S_2$$

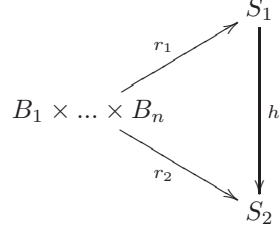
where S_1, S_2 are Ω_2 -algebras and

$$g_1 : A \dashrightarrow S_1 \quad g_2 : A \dashrightarrow S_2$$

are effective representations of multiplicative Ω_1 -group A . We define morphism $R_1 \rightarrow R_2$ to be reduced morphism of representations $h : S_1 \rightarrow S_2$ making following

^{3.7}I give definition of tensor product of representations of universal algebra following to definition in [1], p. 601 - 603.

diagram commutative



Universal object $B_1 \otimes \dots \otimes B_n$ of category \mathcal{A} is called **tensor product** of representations B_1, \dots, B_n . \square

THEOREM 3.3.2. *Since there exists tensor product of effective representations, then tensor product is unique up to isomorphism of representations.*

PROOF. Let A be Abelian multiplicative Ω_1 -group. Let B_1, \dots, B_n be Ω_2 -algebras. Let, for any $k, k = 1, \dots, n$,

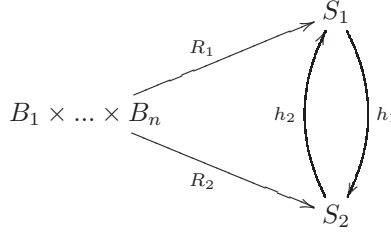
$$f_k : A \multimap B_k$$

be effective representation of multiplicative Ω_1 -group A in Ω_2 -algebra B_k . Let effective representations

$$g_1 : A \multimap S_1 \quad g_2 : A \multimap S_2$$

be tensor product of representations B_1, \dots, B_n . From commutativity of the diagram

(3.3.1)



it follows that

$$(3.3.2) \quad \begin{aligned} R_1 &= h_2 \circ h_1 \circ R_1 \\ R_2 &= h_1 \circ h_2 \circ R_2 \end{aligned}$$

From equalities (3.3.2), it follows that morphisms of representation $h_1 \circ h_2, h_2 \circ h_1$ are identities. Therefore, morphisms of representation h_1, h_2 are isomorphisms. \square

CONVENTION 3.3.3. *Algebras S_1, S_2 may be different sets. However they are indistinguishable for us when we consider them as isomorphic representations. In such case, we write the statement $S_1 = S_2$.* \square

DEFINITION 3.3.4. *Tensor product*

$$B^{\otimes n} = B_1 \otimes \dots \otimes B_n \quad B_1 = \dots = B_n = B$$

is called **tensor power** of representation B . \square

THEOREM 3.3.5. *Since there exists polymorphism of representations, then there exists tensor product of representations.*

PROOF. Let

$$f : A \twoheadrightarrow M$$

be representation of Ω_1 -algebra A generated by Cartesian product $B_1 \times \dots \times B_n$ of sets B_1, \dots, B_n .^{3.8} Injection

$$i : B_1 \times \dots \times B_n \longrightarrow M$$

is defined according to rule^{3.9}

$$(3.3.3) \quad i \circ (b_1, \dots, b_n) = (b_1, \dots, b_n)$$

Let N be equivalence generated by following equalities^{3.10}

$$(3.3.4) \quad (b_1, \dots, b_{i-1} \dots b_{i,p} \omega, \dots, b_n) = (b_1, \dots, b_{i-1}, \dots, b_n) \dots (b_1, \dots, b_{i,p}, \dots, b_n) \omega$$

$$(3.3.5) \quad (b_1, \dots, f_i(a) \circ b_i, \dots, b_n) = f(a) \circ (b_1, \dots, b_i, \dots, b_n)$$

$$b_k \in B_k \quad k = 1, \dots, n \quad b_{i-1}, \dots, b_{i,p} \in B_i \quad \omega \in \Omega_2(p) \quad a \in A$$

LEMMA 3.3.6. *Let $\omega \in \Omega_2(p)$. Then*

$$(3.3.6) \quad \begin{aligned} & f(c) \circ (b_1, \dots, b_{i-1} \dots b_{i,p} \omega, \dots, b_n) \\ &= f(c) \circ ((b_1, \dots, b_{i-1}, \dots, b_n) \dots (b_1, \dots, b_{i,p}, \dots, b_n) \omega) \end{aligned}$$

PROOF. From the equality (3.3.5), it follows that

$$(3.3.7) \quad f(c) \circ (b_1, \dots, b_{i-1} \dots b_{i,p} \omega, \dots, b_n) = (b_1, \dots, f_i(c) \circ (b_{i-1} \dots b_{i,p} \omega), \dots, b_n)$$

Since $f_i(c)$ is endomorphism of Ω_2 -algebra B_i , then from the equality (3.3.7), it follows that

$$(3.3.8) \quad f(c) \circ (b_1, \dots, b_{i-1} \dots b_{i,p} \omega, \dots, b_n) = (b_1, \dots, (f_i(c) \circ b_{i-1}) \dots (f_i(c) \circ b_{i,p}) \omega, \dots, b_n)$$

From equalities (3.3.8), (3.3.4), it follows that

$$(3.3.9) \quad \begin{aligned} & f(c) \circ (b_1, \dots, b_{i-1} \dots b_{i,p} \omega, \dots, b_n) \\ &= (b_1, \dots, f_i(c) \circ b_{i-1}, \dots, b_n) \dots (b_1, \dots, f_i(c) \circ b_{i,p}, \dots, b_n) \omega \end{aligned}$$

From equalities (3.3.9), (3.3.5), it follows that

$$(3.3.10) \quad \begin{aligned} & f(c) \circ (b_1, \dots, b_{i-1} \dots b_{i,p} \omega, \dots, b_n) \\ &= (f(c) \circ (b_1, \dots, b_{i-1}, \dots, b_n)) \dots (f(c) \circ (b_1, \dots, b_{i,p}, \dots, b_n)) \omega \end{aligned}$$

Since $f(c)$ is endomorphism of Ω_2 -algebra B , then the equality (3.3.6) follows from the equality (3.3.10). \odot

LEMMA 3.3.7.

$$(3.3.11) \quad f(c) \circ (b_1, \dots, f_i(a) \circ b_i, \dots, b_n) = f(c) \circ (f(a) \circ (b_1, \dots, b_i, \dots, b_n))$$

^{3.8}According to theorems 2.1.3, 2.3.2, the set generated by reduced Cartesian product of representations B_1, \dots, B_n coincides with Cartesian product $B_1 \times \dots \times B_n$ of sets B_1, \dots, B_n . At this point of the proof, we do not consider any algebra structure on the set $B_1 \times \dots \times B_n$.

^{3.9}The equality (3.3.3) states that we identify the basis of the representation M with the set $B_1 \times \dots \times B_n$.

^{3.10}I considered generating of elements of representation according to the theorem [4]-2.6.4. The theorem 3.3.11 requires the fulfillment of conditions (3.3.4), (3.3.5).

PROOF. From the equality (3.3.5), it follows that

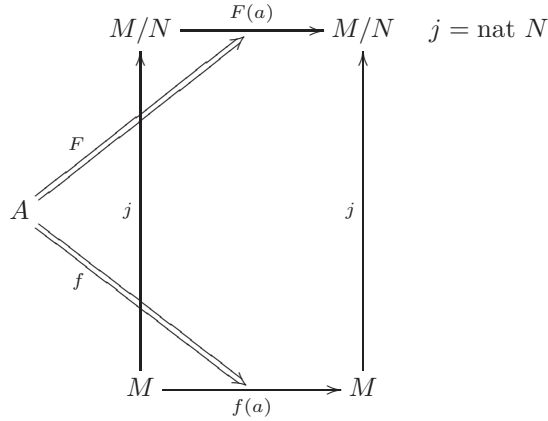
$$\begin{aligned}
 (3.3.12) \quad f(c) \circ (b_1, \dots, f_i(a) \circ b_i, \dots, b_n) &= (b_1, \dots, f_i(c) \circ (f_i(a) \circ b_i), \dots, b_n) \\
 &= (b_1, \dots, (f_i(c) \circ f_i(a)) \circ b_i, \dots, b_n) \\
 &= (f(c) \circ f(a)) \circ (b_1, \dots, b_i, \dots, b_n) \\
 &= f(c) \circ (f(a) \circ (b_1, \dots, b_i, \dots, b_n))
 \end{aligned}$$

The equality (3.3.11) follows from the equality (3.3.12). \odot

LEMMA 3.3.8. For any $c \in A$, endomorphism $f(c)$ of Ω_2 -algebra M is coordinated with equivalence N .

PROOF. The lemma follows from lemmas 3.3.6, 3.3.7 and from the definition [4]-2.2.14. \odot

From the lemma 3.3.8 and the theorem [7]-3.2.15, it follows that Ω_1 -algebra is defined on the set ${}^*M/N$. Consider diagram



According to lemma 3.3.8, from the condition

$$j \circ b_1 = j \circ b_2$$

it follows that

$$j \circ (f(a) \circ b_1) = j \circ (f(a) \circ b_2)$$

Therefore, transformation $F(a)$ is well defined and

$$(3.3.13) \quad F(a) \circ j = j \circ f(a)$$

If $\omega \in \Omega_1(p)$, then we assume

$$(F(a_1) \dots F(a_p) \omega) \circ (J \circ b) = J \circ ((f(a_1) \dots f(a_p) \omega) \circ b)$$

Therefore, map F is representations of Ω_1 -algebra A . From (3.3.13) it follows that j is reduced morphism of representations f and F .

Consider commutative diagram

$$(3.3.14) \quad \begin{array}{ccc} & & M/N \\ & \nearrow g_1 & \\ B_1 \times \dots \times B_n & \xrightarrow{i} & M \\ & \searrow j & \end{array}$$

From commutativity of the diagram (3.3.14) and from the equality (3.3.3), it follows that

$$(3.3.15) \quad g_1 \circ (b_1, \dots, b_n) = j \circ (b_1, \dots, b_n)$$

From equalities (3.3.3), (3.3.4), (3.3.5), it follows that

$$(3.3.16) \quad \begin{aligned} & g_1 \circ (b_1, \dots, b_{i-1} \dots b_{i,p} \omega, \dots, b_n) \\ &= (g_1 \circ (b_1, \dots, b_{i-1}, \dots, b_n)) \dots (g_1 \circ (b_1, \dots, b_{i,p}, \dots, b_n)) \omega \end{aligned}$$

$$(3.3.17) \quad g_1 \circ (b_1, \dots, f_i(a) \circ b_i, \dots, b_n) = f(a) \circ (g_1 \circ (b_1, \dots, b_i, \dots, b_n))$$

From equalities (3.3.16) and (3.3.17) it follows that map g_1 is reduced polymorphism of representations f_1, \dots, f_n .

Since $B_1 \times \dots \times B_n$ is the basis of representation M of Ω_1 algebra A , then, according to the theorem [4]-2.7.7, for any representation

$$A \twoheadrightarrow V$$

and any reduced polymorphism

$$g_2 : B_1 \times \dots \times B_n \longrightarrow V$$

there exists a unique morphism of representations $k : M \rightarrow V$, for which following diagram is commutative

$$(3.3.18) \quad \begin{array}{ccc} B_1 \times \dots \times B_n & \xrightarrow{i} & M \\ & \searrow g_2 & \downarrow k \\ & & V \end{array}$$

Since g_2 is reduced polymorphism, then $\ker k \supseteq N$.

According to the theorem 3.2.3, map j is universal in the category of morphisms of representation f whose kernel contains N . Therefore, we have morphism of representations

$$h : M/N \rightarrow V$$

which makes the following diagram commutative

$$(3.3.19) \quad \begin{array}{ccc} & M/N & \\ \nearrow j & \downarrow h & \\ M & & V \\ \searrow k & & \end{array}$$

We join diagrams (3.3.14), (3.3.18), (3.3.19), and get commutative diagram

$$\begin{array}{ccccc} & & & M/N & \\ & & g_1 \nearrow & \downarrow h & \\ B_1 \times \dots \times B_n & \xrightarrow{i} & M & \searrow k & \\ & \searrow g_2 & & & V \end{array}$$

Since $\text{Im } g_1$ generates M/N , than map h is uniquely determined. \square

According to proof of theorem 3.3.5

$$B_1 \otimes \dots \otimes B_n = M/N$$

If $d_i \in A_i$, we write

$$(3.3.20) \quad j \circ (d_1, \dots, d_n) = d_1 \otimes \dots \otimes d_n$$

From equalities (3.3.15), (3.3.20), it follows that

$$(3.3.21) \quad g_1 \circ (d_1, \dots, d_n) = d_1 \otimes \dots \otimes d_n$$

THEOREM 3.3.9. *The map*

$$(x_1, \dots, x_n) \in B_1 \times \dots \times B_n \rightarrow x_1 \otimes \dots \otimes x_n \in B_1 \otimes \dots \otimes B_n$$

is polymorphism.

PROOF. The theorem follows from definitions 3.1.3, 3.3.1. \square

THEOREM 3.3.10. *Let B_1, \dots, B_n be Ω_2 -algebras. Let*

$$f : B_1 \times \dots \times B_n \rightarrow B_1 \otimes \dots \otimes B_n$$

be reduced polymorphism defined by equality

$$(3.3.22) \quad f \circ (b_1, \dots, b_n) = b_1 \otimes \dots \otimes b_n$$

Let

$$g : B_1 \times \dots \times B_n \rightarrow V$$

be reduced polymorphism into Ω -algebra V . There exists morphism of representations

$$h : B_1 \otimes \dots \otimes B_n \rightarrow V$$

such that the diagram

$$\begin{array}{ccc} & & B_1 \otimes \dots \otimes B_n \\ & \nearrow f & \downarrow h \\ B_1 \times \dots \times B_n & & V \\ & \searrow g & \end{array}$$

is commutative.

PROOF. equality (3.3.22) follows from equalities (3.3.3) and (3.3.20). An existence of the map h follows from the definition 3.3.1 and constructions made in the proof of the theorem 3.3.5. \square

THEOREM 3.3.11. *Let*

$$b_k \in B_k \quad k = 1, \dots, n \quad b_{i,1}, \dots, b_{i,p} \in B_i \quad \omega \in \Omega_2(p) \quad a \in A$$

Tensor product is distributive over operation ω

$$(3.3.23) \quad \begin{aligned} & b_1 \otimes \dots \otimes (b_{i,1} \dots b_{i,p} \omega) \otimes \dots \otimes b_n \\ &= (b_1 \otimes \dots \otimes b_{i,1} \otimes \dots \otimes b_n) \dots (b_1 \otimes \dots \otimes b_{i,p} \otimes \dots \otimes b_n) \omega \end{aligned}$$

The representation of multiplicative Ω_1 -group A in tensor product is defined by equality

$$(3.3.24) \quad b_1 \otimes \dots \otimes (f_i(a) \circ b_i) \otimes \dots \otimes b_n = f(a) \circ (b_1 \otimes \dots \otimes b_i \otimes \dots \otimes b_n)$$

PROOF. The equality (3.3.23) follows from the equality (3.3.16) and from the definition (3.3.21). The equality (3.3.24) follows from the equality (3.3.17) and from the definition (3.3.21). \square

3.4. Associativity of Tensor Product

Let A be multiplicative Ω_1 -group. Let B_1, B_2, B_3 be Ω_2 -algebras. Let, for $k = 1, 2, 3$,

$$f_k : A \dashrightarrow B_k$$

be effective representation of multiplicative Ω_1 -group A in Ω_2 -algebra B_k .

LEMMA 3.4.1. For given value of $x_3 \in B_3$, the map

$$(3.4.1) \quad h_{12} : (B_1 \otimes B_2) \times B_3 \rightarrow B_1 \otimes B_2 \otimes B_3$$

defined by equality

$$(3.4.2) \quad h_{12}(x_1 \otimes x_2, x_3) = x_1 \otimes x_2 \otimes x_3$$

is reduced morphism of the representation $B_1 \otimes B_2$ into the representation $B_1 \otimes B_2 \otimes B_3$.

PROOF. According to the theorem 3.3.9, for given value of $x_3 \in B_3$, the map

$$(3.4.3) \quad (x_1, x_2, x_3) \in B_1 \times B_2 \times B_3 \rightarrow x_1 \otimes x_2 \otimes x_3 \in B_1 \otimes B_2 \otimes B_3$$

is polymorphism with respect to $x_1 \in B_1, x_2 \in B_2$. Therefore, for given value of $x_3 \in B_3$, the lemma follows from the theorem 3.3.10. \square

LEMMA 3.4.2. For given value of $x_{12} \in B_1 \otimes B_2$ the map h_{12} is reduced morphism of the representation B_3 into the representation $B_1 \otimes B_2 \otimes B_3$.

PROOF. According to the theorem 3.3.9 and the equality (3.3.21), for given value of $x_1 \in B_1, x_2 \in B_2$, the map

$$(3.4.4) \quad (x_1 \otimes x_2, x_3) \in B_1 \times B_2 \times B_3 \rightarrow x_1 \otimes x_2 \otimes x_3 \in B_1 \otimes B_2 \otimes B_3$$

is morphism with respect to $x_3 \in B_3$. Therefore, the theorem follows from theorems 3.1.10, 3.1.11. \square

LEMMA 3.4.3. There exists reduced morphism of representations

$$h : (B_1 \otimes B_2) \otimes B_3 \rightarrow B_1 \otimes B_2 \otimes B_3$$

PROOF. According to lemmas 3.4.1, 3.4.2 and to the definition 3.1.3, the map h_{12} is reduced polymorphism of representations. The lemma follows from the theorem 3.3.10. \square

LEMMA 3.4.4. There exists reduced morphism of representations

$$g : B_1 \otimes B_2 \otimes B_3 \rightarrow (B_1 \otimes B_2) \otimes B_3$$

PROOF. The map

$$(x_1, x_2, x_3) \in B_1 \times B_2 \times B_3 \rightarrow (x_1 \otimes x_2) \otimes x_3 \in (B_1 \otimes B_2) \otimes B_3$$

is polymorphism with respect to $x_1 \in B_1, x_2 \in B_2, x_3 \in B_3$. Therefore, the lemma follows from the theorem 3.3.10. \square

THEOREM 3.4.5.

$$(3.4.5) \quad (B_1 \otimes B_2) \otimes B_3 = B_1 \otimes (B_2 \otimes B_3) = B_1 \otimes B_2 \otimes B_3$$

PROOF. According to lemma 3.4.3, there exists reduced morphism of representations

$$h : (B_1 \otimes B_2) \otimes B_3 \rightarrow B_1 \otimes B_2 \otimes B_3$$

According to lemma 3.4.4, there exists reduced morphism of representations

$$g : B_1 \otimes B_2 \otimes B_3 \rightarrow (B_1 \otimes B_2) \otimes B_3$$

Therefore, reduced morphisms of representations h, g are isomorphisms. Therefore, the following equality is true

$$(3.4.6) \quad (B_1 \otimes B_2) \otimes B_3 = B_1 \otimes B_2 \otimes B_3$$

We prove similarly the equality

$$B_1 \otimes (B_2 \otimes B_3) = B_1 \otimes B_2 \otimes B_3$$

\square

REMARK 3.4.6. *It is evident that structures of Ω_2 -algebras $(B_1 \otimes B_2) \otimes B_3, B_1 \otimes B_2 \otimes B_3$ are little different. We write down the equality (3.4.6) based on the convention 3.3.3 and this allows us to speak about associativity of tensor product of representations.* \square

CHAPTER 4

D -Module

4.1. Module over Commutative Ring

THEOREM 4.1.1. *Let ring D has unit e . Representation*

$$f : D \dashrightarrow V$$

*of the ring D in an Abelian group A is **effective** iff $a = 0$ follows from equality $f(a) = 0$.*

PROOF. We define the sum of transformations f and g of an Abelian group according to rule

$$(f + g)(a) = f(a) + g(a)$$

Therefore, considering the representation of the ring D in the Abelian group A , we assume

$$f(a + b)(x) = f(a)(x) + f(b)(x)$$

Suppose $a, b \in R$ cause the same transformation. Then

$$(4.1.1) \quad f(a) \circ m = f(b) \circ m$$

for any $m \in A$. From the equality (4.1.1) it follows that $a - b$ generates zero transformation

$$f(a - b) \circ m = 0$$

Element $e + a - b$ generates an identity transformation. Therefore, the representation f is effective iff $a = b$. \square

DEFINITION 4.1.2. *Effective representation of commutative ring D in an Abelian group V*

$$(4.1.2) \quad f : D \dashrightarrow V \quad f(d) : v \rightarrow dv$$

*is called **module over ring D** or **D -module**.* \square

THEOREM 4.1.3. *Following conditions hold for D -module:*

- **associative law**

$$(4.1.3) \quad (ab)m = a(bm)$$

- **distributive law**

$$(4.1.4) \quad a(m + n) = am + an$$

$$(4.1.5) \quad (a + b)m = am + bm$$

- **unitarity law**

$$(4.1.6) \quad 1m = m$$

for any $a, b \in D, m, n \in V$.

PROOF. Since transformation a is endomorphism of the Abelian group, we obtain the equality (4.1.4). Since representation (4.1.2) is homomorphism of the additive group of ring D , we obtain the equality (4.1.5). Since representation (4.1.2) is left-side representation of the multiplicative group of ring D , we obtain equalities (4.1.3) and (4.1.6). \square

THEOREM 4.1.4. *The set of vectors generated by the set of vectors $v = (v_i \in V, i \in I)$ has form*

$$(4.1.7) \quad J(v) = \left\{ w : w = \sum_{i \in I} c^i v_i, c^i \in D \right\}$$

PROOF. We prove the theorem by induction based on the theorem [4]-2.6.4.

Let $k = 0$. According to the theorem [4]-2.6.4, $X_0 = v$. For any $v_k \in v$, let $c^i = \delta_k^i$. Then

$$(4.1.8) \quad v_k = \sum_{i \in I} c^i v_i$$

$v_k \in J(v)$ follows from (4.1.7), (4.1.8).

Let $X_{k-1} \subseteq J(v)$.

- Let $w_1, w_2 \in X_{k-1}$. Since V is Abelian group, then according to the statement [4]-2.6.4.3, $w_1 + w_2 \in X_k$. According to statements [4]-(2.6.1), (4.1.7), there exist D -numbers $c^i, d^i, i \in I$, such that

$$(4.1.9) \quad \begin{aligned} w_1 &= \sum_{i \in I} c^i v_i \\ w_2 &= \sum_{i \in I} d^i v_i \end{aligned}$$

Since V is Abelian group, then from the equality (4.1.9) it follows that

$$(4.1.10) \quad w_1 + w_2 = \sum_{i \in I} c^i v_i + \sum_{i \in I} d^i v_i = \sum_{i \in I} (c^i v_i + d^i v_i)$$

The equality

$$(4.1.11) \quad w_1 + w_2 = \sum_{i \in I} (c^i + d^i) v_i$$

follows from equalities (4.1.5), (4.1.10). From the equality (4.1.11), it follows that $w_1 + w_2 \in J(v)$.

- Let $w \in X_{k-1}$. According to the statement [4]-2.6.4.4, for any D -number a , $aw \in X_k$. According to statements [4]-(2.6.1), (4.1.7), there exist D -numbers $c^i, i \in I$, such that

$$(4.1.12) \quad w = \sum_{i \in I} c^i v_i$$

From the equality (4.1.12) it follows that

$$(4.1.13) \quad aw = a \sum_{i \in I} c^i v_i = \sum_{i \in I} a(c^i v_i) = \sum_{i \in I} (ac^i) v_i$$

From the equality (4.1.13), it follows that $aw \in J(v)$. \square

CONVENTION 4.1.5. We will use Einstein summation convention in which repeated index (one above and one below) implies summation with respect to repeated index. In this case we assume that we know the set of summation index and do not use summation symbol

$$c^i v_i = \sum_{i \in I} c^i v_i$$

□

DEFINITION 4.1.6. Let $v = (v_i \in V, i \in I)$ be set of vectors. The expression $c^i v_i$ is called **linear composition of vectors** v_i . A vector

$$w = c^i v_i$$

is called **vector linearly dependent on vectors** v_i . □

THEOREM 4.1.7. Let D be field. Since equality

$$(4.1.14) \quad c^i v_i = 0$$

implies existence of index $i = j$ such that $c^j \neq 0$, then the vector v_j linearly depends on rest of vectors v .

PROOF. The theorem follows from the equality

$$v_j = \sum_{i \in I \setminus \{j\}} \frac{c^i}{c^j} v_i$$

and from the definition 4.1.6. □

It is evident that for any set of vectors v_i

$$0 = c^i v_i \quad c^i = 0$$

DEFINITION 4.1.8. Vectors^{4.1} $e_i, i \in I$, of D -module A are **linearly independent** if $c = 0$ follows from the equality

$$c^i e_i = 0$$

Otherwise vectors $e_i, i \in I$, are **linearly dependent**. □

THEOREM 4.1.9. Let D be field. A set of vectors $\bar{e} = (e_i, i \in I)$ is a **basis of D -vector space** V , if vectors e_i are linearly independent and any vector $v \in V$ linearly depends on vectors e_i .

PROOF. Let $\bar{e} = (e_i, i \in I)$ be basis of D -vector space V . According to the definition [4]-2.7.1 and to theorems [4]-2.6.4, 4.1.4, any vector $v \in V$ is linear composition of vectors e_i

$$(4.1.15) \quad v = v^i e_i$$

From the equality (4.1.15), it follows that the set of vectors $v, e_i, i \in I$, is not linearly independent.

Consider equality

$$(4.1.16) \quad c^i e_i = 0$$

According to the theorem 4.1.7, since

$$(4.1.17) \quad c^j \neq 0$$

^{4.1}I follow to the definition in [1], p. 130.

then the vector e_j linearly depends on rest of vectors e . Therefore the set of vectors $e_i, i \in I \setminus \{j\}$, generates D -vector space V . According to the definition [4]-2.7.1, the statement (4.1.17) is not true. According to the definition 4.1.8, vectors e_i are linearly independent. \square

DEFINITION 4.1.10. A set of vectors $\bar{e} = (e_i, i \in I)$ is called^{4.2} a **basis of D -module V** , if arbitrary vector $v \in V$ is linear combination of vectors of the basis and arbitrary vector of the basis cannot be represented as a linear combination of the remaining vectors of basis. A is **free module over ring D** , if A has basis over ring D .^{4.3} \square

DEFINITION 4.1.11. Let \bar{e} be the basis of D -module A and A -number a has expansion

$$a = a^i e_i$$

with respect to the basis \bar{e} . D -numbers a^i are called **coordinates** of A -number a with respect to the basis \bar{e} . \square

4.2. Linear Map of D -Module

DEFINITION 4.2.1. Let A_1, A_2 be D -modules. Morphism of representations

$$f : A_1 \rightarrow A_2$$

of D -module A_1 into D -module A_2 is called **linear map** of D -module A_1 into D -module A_2 . Let us denote $\mathcal{L}(D; A_1 \rightarrow A_2)$ set of linear maps of D -module A_1 into D -module A_2 . \square

THEOREM 4.2.2. Linear map

$$f : A_1 \rightarrow A_2$$

of D -module A_1 into D -module A_2 satisfies to equalities^{4.4}

$$(4.2.1) \quad f \circ (a + b) = f \circ a + f \circ b$$

$$(4.2.2) \quad f \circ (pa) = p(f \circ a)$$

$$a, b \in A_1 \quad p \in D$$

PROOF. From definition 4.2.1 and theorem [7]-3.3.1 it follows that the map f is a homomorphism of the Abelian group A_1 into the Abelian group A_2 (the equality (4.2.1)). The equality (4.2.2) follows from the equality [7]-(3.3.3). \square

THEOREM 4.2.3. Let A_1, A_2 be D -modules. The map

$$(4.2.3) \quad f + g : A_1 \rightarrow A_2 \quad f, g \in \mathcal{L}(D; A_1 \rightarrow A_2)$$

defined by equation

$$(4.2.4) \quad (f + g) \circ x = f \circ x + g \circ x$$

is called **sum of maps f and g** and is linear map. The set $\mathcal{L}(D; A_1; A_2)$ is an Abelian group relative sum of maps.

^{4.2}The definition 4.1.10 follows from the theorem [4]-2.7.2 and the remark [4]-2.7.3.

^{4.3}I follow to the definition in [1], p. 135.

^{4.4}In some books (for instance, [1], p. 119) the theorem 4.2.2 is considered as a definition.

PROOF. According to the theorem 4.2.2

$$(4.2.5) \quad f \circ (v + w) = f \circ v + f \circ w$$

$$(4.2.6) \quad f \circ (dv) = d(f \circ v)$$

$$(4.2.7) \quad g \circ (v + w) = g \circ v + g \circ w$$

$$(4.2.8) \quad g \circ (dv) = d(g \circ v)$$

The equality

$$(4.2.9) \quad \begin{aligned} (f + g) \circ (v + w) &= f \circ (v + w) + g \circ (v + w) \\ &= f \circ v + f \circ w + g \circ v + g \circ w \\ &= (f + g) \circ v + (f + g) \circ w \end{aligned}$$

follows from the equalities (4.2.4), (4.2.5), (4.2.7). The equality

$$(4.2.10) \quad \begin{aligned} (f + g) \circ (dv) &= f \circ (dv) + g \circ (dv) \\ &= df \circ v + dg \circ v \\ &= d(f \circ v + g \circ v) \\ &= d((f + g) \circ v) \end{aligned}$$

follows from the equalities (4.2.4), (4.2.6), (4.2.8). From equalities (4.2.9), (4.2.10) and from the theorem 4.2.2, it follows that the map (4.2.3) is linear map of D -modules.

From the equality (4.2.4), it follows that the map

$$0 : v \in A_1 \rightarrow 0 \in A_2$$

is zero of addition

$$(0 + f) \circ v = 0 \circ v + f \circ v = f \circ v$$

From the equality (4.2.4), it follows that the map

$$-f : v \in A_1 \rightarrow -(f \circ v) \in A_2$$

is map inversed to map f

$$(f + (-f)) \circ v = f \circ v + (-f) \circ v = f \circ v - f \circ v = 0 = 0 \circ v$$

From the equality

$$\begin{aligned} (f + g) \circ x &= f \circ x + g \circ x \\ &= g \circ x + f \circ x \\ &= (g + f) \circ x \end{aligned}$$

it follows that sum of maps is commutative. \square

THEOREM 4.2.4. Let A_1, A_2 be D -modules. The map

$$(4.2.11) \quad df : A_1 \rightarrow A_2 \quad d \in D \quad f \in \mathcal{L}(D; A_1 \rightarrow A_2)$$

defined by equality

$$(4.2.12) \quad (df) \circ x = d(f \circ x)$$

is linear map and is called **product of map f over scalar d** . The representation

$$(4.2.13) \quad a : f \in \mathcal{L}(D; A_1 \rightarrow A_2) \rightarrow af \in \mathcal{L}(D; A_1 \rightarrow A_2)$$

of ring D in Abelian group $\mathcal{L}(D; A_1 \rightarrow A_2)$ generates structure of D -module.

PROOF. According to the theorem 4.2.2

$$(4.2.14) \quad f \circ (v + w) = f \circ v + f \circ w$$

$$(4.2.15) \quad f \circ (d v) = d(f \circ v)$$

The equality

$$(4.2.16) \quad \begin{aligned} (d f) \circ (v + w) &= d(f \circ (v + w)) \\ &= d(f \circ v + f \circ w) = d(f \circ v) + d(f \circ w) \\ &= (d f) \circ v + (d f) \circ w \end{aligned}$$

follows from the equalities (4.2.12), (4.2.14). The equality

$$(4.2.17) \quad \begin{aligned} (c f) \circ (d v) &= c(f \circ (d v)) = c d(f \circ v) = d(c(f \circ v)) \\ &= d((c f) \circ v) \end{aligned}$$

follows from the equalities (4.2.12), (4.2.15). From equalities (4.2.16), (4.2.17) and from the theorem 4.2.2, it follows that the map (4.2.11) is linear map of D -modules.

The equality

$$(4.2.18) \quad (p + q)f = pf + qf$$

follows from the equality

$$\begin{aligned} ((a + b)f) \circ v &= (a + b)(f \circ v) = a(f \circ v) + b(f \circ v) = (af) \circ v + (bf) \circ v \\ &= (af + bf) \circ v \end{aligned}$$

The equality

$$(4.2.19) \quad p(qf) = (pq)f$$

follows from the equality

$$((ab)f) \circ v = (ab)(f \circ v) = a(b(f \circ v)) = a((bf) \circ v) = (a(bf)) \circ v$$

From equalities (4.2.18), (4.2.19), it follows that the map (4.2.13) is representation of ring D in Abelian group $\mathcal{L}(D; A_1 \rightarrow A_2)$. According to the definition 4.1.2 and the theorem 4.2.3, Abelian group $\mathcal{L}(D; A_1 \rightarrow A_2)$ is D -module. \square

THEOREM 4.2.5. Let map

$$f : A_1 \rightarrow A_2$$

be linear map of D -module A_1 into D -module A_2 . Then

$$f \circ 0 = 0$$

PROOF. The theorem follows from the equality

$$f \circ (a + 0) = f \circ a + f \circ 0$$

\square

4.3. Polylinear Map of D -Module

DEFINITION 4.3.1. Let D be the commutative ring. Reduced polymorphism of D -modules A_1, \dots, A_n into D -module S

$$f : A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow S$$

is called **polylinear map** of D -modules A_1, \dots, A_n into D -module S . Let us denote $\mathcal{L}(D; A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow S)$ set of polylinear maps of D -modules A_1, \dots, A_n into D -module S . Let us denote $\mathcal{L}(D; A^n \rightarrow S)$ set of n -linear maps of D -module A ($A_1 = \dots = A_n = A$) into D -module S . \square

THEOREM 4.3.2. Let D be the commutative ring. The polylinear map of D -modules A_1, \dots, A_n into D -module S

$$f : A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow S$$

satisfies to equalities

$$f \circ (a_1, \dots, a_i + b_i, \dots, a_n) = f \circ (a_1, \dots, a_i, \dots, a_n) + f \circ (a_1, \dots, b_i, \dots, a_n)$$

$$f \circ (a_1, \dots, pa_i, \dots, a_n) = pf \circ (a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)$$

$$f \circ (a_1, \dots, a_i + b_i, \dots, a_n) = f \circ (a_1, \dots, a_i, \dots, a_n) + f \circ (a_1, \dots, b_i, \dots, a_n)$$

$$f \circ (a_1, \dots, pa_i, \dots, a_n) = pf \circ (a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)$$

$$1 \leq i \leq n \quad a_i, b_i \in A_i \quad p \in D$$

PROOF. The theorem follows from definitions 3.1.1, 4.2.1 and from the theorem 4.2.2. \square

THEOREM 4.3.3. Let D be the commutative ring. Let A_1, \dots, A_n, S be D -modules. The map

$$(4.3.1) \quad f + g : A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow S \quad f, g \in \mathcal{L}(D; A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow S)$$

defined by equation

$$(4.3.2) \quad (f + g) \circ (a_1, \dots, a_n) = f \circ (a_1, \dots, a_n) + g \circ (a_1, \dots, a_n)$$

is called **sum of polylinear maps** f and g and is polylinear map. The set $\mathcal{L}(D; A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow S)$ is an Abelian group relative sum of maps.

PROOF. According to the theorem 4.3.2

$$(4.3.3) \quad f \circ (a_1, \dots, a_i + b_i, \dots, a_n) = f \circ (a_1, \dots, a_i, \dots, a_n) + f \circ (a_1, \dots, b_i, \dots, a_n)$$

$$(4.3.4) \quad f \circ (a_1, \dots, pa_i, \dots, a_n) = pf \circ (a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)$$

$$(4.3.5) \quad g \circ (a_1, \dots, a_i + b_i, \dots, a_n) = g \circ (a_1, \dots, a_i, \dots, a_n) + g \circ (a_1, \dots, b_i, \dots, a_n)$$

$$(4.3.6) \quad g \circ (a_1, \dots, pa_i, \dots, a_n) = pg \circ (a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)$$

The equality

$$\begin{aligned}
 & (f + g) \circ (x_1, \dots, x_i + y_i, \dots, x_n) \\
 &= f \circ (x_1, \dots, x_i + y_i, \dots, x_n) + g \circ (x_1, \dots, x_i + y_i, \dots, x_n) \\
 (4.3.7) \quad &= f \circ (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) + f \circ (x_1, \dots, y_i, \dots, x_n) \\
 &+ g \circ (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) + g \circ (x_1, \dots, y_i, \dots, x_n) \\
 &= (f + g) \circ (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) + (f + g) \circ (x_1, \dots, y_i, \dots, x_n)
 \end{aligned}$$

follows from the equalities (4.3.2), (4.3.3), (4.3.5). The equality

$$\begin{aligned}
 & (f + g) \circ (x_1, \dots, px_i, \dots, x_n) \\
 &= f \circ (x_1, \dots, px_i, \dots, x_n) + g \circ (x_1, \dots, px_i, \dots, x_n) \\
 (4.3.8) \quad &= pf \circ (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) + pg \circ (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \\
 &= p(f \circ (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) + g \circ (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)) \\
 &= p(f + g) \circ (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)
 \end{aligned}$$

follows from the equalities (4.3.2), (4.3.4), (4.3.6). From equalities (4.3.7), (4.3.8) and from the theorem 4.3.2, it follows that the map (4.3.1) is linear map of D -modules.

Let $f, g, h \in \mathcal{L}(D; A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow S)$. For any $a = (a_1, \dots, a_n)$, $a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n$,

$$\begin{aligned}
 & (f + g) \circ a = f \circ a + g \circ a = g \circ a + f \circ a \\
 &= (g + f) \circ a \\
 &((f + g) + h) \circ a = (f + g) \circ a + h \circ a = (f \circ a + g \circ a) + h \circ a \\
 &= f \circ a + (g \circ a + h \circ a) = f \circ a + (g + h) \circ a \\
 &= (f + (g + h)) \circ a
 \end{aligned}$$

Therefore, sum of polylinear maps is commutative and associative.

From the equality (4.3.2), it follows that the map

$$0 : v \in A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow 0 \in S$$

is zero of addition

$$(0 + f) \circ (a_1, \dots, a_n) = 0 \circ (a_1, \dots, a_n) + f \circ (a_1, \dots, a_n) = f \circ (a_1, \dots, a_n)$$

From the equality (4.3.2), it follows that the map

$$-f : (a_1, \dots, a_n) \in A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow -(f \circ (a_1, \dots, a_n)) \in S$$

is map inversed to map f

$$f + (-f) = 0$$

because

$$\begin{aligned}
 & (f + (-f)) \circ (a_1, \dots, a_n) = f \circ (a_1, \dots, a_n) + (-f) \circ (a_1, \dots, a_n) \\
 &= f \circ (a_1, \dots, a_n) - f \circ (a_1, \dots, a_n) \\
 &= 0 = 0 \circ (a_1, \dots, a_n)
 \end{aligned}$$

From the equality

$$\begin{aligned}(f + g) \circ (a_1, \dots, a_n) &= f \circ (a_1, \dots, a_n) + g \circ (a_1, \dots, a_n) \\ &= g \circ (a_1, \dots, a_n) + f \circ (a_1, \dots, a_n) \\ &= (g + f) \circ (a_1, \dots, a_n)\end{aligned}$$

it follows that sum of maps is commutative. Therefore, the set $\mathcal{L}(D; A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow S)$ is an Abelian group. \square

THEOREM 4.3.4. *Let D be the commutative ring. Let A_1, \dots, A_n, S be D -modules. The map*

$$(4.3.9) \quad df : A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow S \quad d \in D \quad f \in \mathcal{L}(D; A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow S)$$

defined by equality

$$(4.3.10) \quad (df) \circ (a_1, \dots, a_n) = d(f \circ (a_1, \dots, a_n))$$

*is polylinear map and is called **product of map f over scalar d** . The representation*

$$(4.3.11) \quad a : f \in \mathcal{L}(D; A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow S) \rightarrow af \in \mathcal{L}(D; A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow S)$$

of ring D in Abelian group $\mathcal{L}(D; A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow S)$ generates structure of D -module.

PROOF. According to the theorem 4.3.2

$$(4.3.12) \quad f \circ (a_1, \dots, a_i + b_i, \dots, a_n) = f \circ (a_1, \dots, a_i, \dots, a_n) + f \circ (a_1, \dots, b_i, \dots, a_n)$$

$$(4.3.13) \quad f \circ (a_1, \dots, pa_i, \dots, a_n) = pf \circ (a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)$$

The equality

$$\begin{aligned}(4.3.14) \quad & (pf) \circ (x_1, \dots, x_i + y_i, \dots, x_n) \\ &= p \circ f \circ (x_1, \dots, x_i + y_i, \dots, x_n) \\ &= p(f \circ (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) + f \circ (x_1, \dots, y_i, \dots, x_n)) \\ &= p(f \circ (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)) + p(f \circ (x_1, \dots, y_i, \dots, x_n)) \\ &= (pf) \circ (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) + (pf) \circ (x_1, \dots, y_i, \dots, x_n)\end{aligned}$$

follows from equalities (4.3.10), (4.3.12). The equality

$$\begin{aligned}(4.3.15) \quad & (pf) \circ (x_1, \dots, qx_i, \dots, x_n) \\ &= p(f \circ (x_1, \dots, qx_i, \dots, x_n)) = pq(f \circ (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)) \\ &= qp(f \circ (x_1, \dots, x_n)) = q(pf) \circ (x_1, \dots, x_n)\end{aligned}$$

follows from equalities (4.3.10), (4.3.13). From equalities (4.3.14), (4.3.15) and from the theorem 4.3.2, it follows that the map (4.3.9) is polylinear map of D -modules.

The equality

$$(4.3.16) \quad (p + q)f = pf + qf$$

follows from the equality

$$\begin{aligned}& ((p + q)f) \circ (x_1, \dots, x_n) = (p + q)(f \circ (x_1, \dots, x_n)) \\ &= p(f \circ (x_1, \dots, x_n)) + q(f \circ (x_1, \dots, x_n)) \\ &= (pf) \circ (x_1, \dots, x_n) + (qf) \circ (x_1, \dots, x_n)\end{aligned}$$

The equality

$$(4.3.17) \quad p(qf) = (pq)f$$

follows from the equality

$$\begin{aligned} (p(qf)) \circ (x_1, \dots, x_n) &= p(qf) \circ (x_1, \dots, x_n) = p(q \circ f \circ (x_1, \dots, x_n)) \\ &= (pq) \circ f \circ (x_1, \dots, x_n) = ((pq)f) \circ (x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

From equalities (4.3.16) (4.3.17) it follows that the map (4.3.11) is representation of ring D in Abelian group $\mathcal{L}(D; A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow S)$. Since specified representation is effective, then, according to the definition 4.1.2 and the theorem 4.3.3, Abelian group $\mathcal{L}(D; A_1 \rightarrow A_2)$ is D -module. \square

4.4. D -module $\mathcal{L}(D; A \rightarrow B)$

THEOREM 4.4.1.

$$(4.4.1) \quad \mathcal{L}(D; A^p \rightarrow \mathcal{L}(D; A^q \rightarrow B)) = \mathcal{L}(D; A^{p+q} \rightarrow B)$$

PROOF. \square

THEOREM 4.4.2. *Let*

$$\bar{e} = \{e_i : i \in I\}$$

be basis of D -module A . The set

$$(4.4.2) \quad \bar{h} = \{h^i \in \mathcal{L}(D; A \rightarrow D) : i \in I, h^i \circ e_j = \delta_j^i\}$$

is the basis of D -module $\mathcal{L}(D; A \rightarrow D)$.

PROOF.

LEMMA 4.4.3. *Maps h^i are linear independent.*

PROOF. Let there exist D -numbers c_i such that

$$c_i h^i = 0$$

Then for any A -number e_j

$$0 = c_i h^i \circ e_j = c_i \delta_j^i = c_j$$

The lemma follows from the definition 4.1.8. \odot

LEMMA 4.4.4. *The map $f \in \mathcal{L}(D; A \rightarrow D)$, is linear composition of maps h^i .*

PROOF. For any A -number a ,

$$(4.4.3) \quad a = a^i e_i$$

the equality

$$(4.4.4) \quad h^i \circ a = h^i \circ (a^j e_j) = a^j (h^i \circ e_j) = a^j \delta_j^i = a^i$$

follows from equalities (4.4.2), (4.4.3) and from the theorem 4.2.2. The equality

$$(4.4.5) \quad f \circ a = f \circ (a^i e_i) = a^i (f \circ e_i) = (f \circ e_i)(h^i \circ a)$$

follows from the equality (4.4.4). The equality

$$f = (f \circ e_i) h^i$$

follows from equalities (4.2.4), (4.2.12), (4.4.5). \odot

The theorem follows from lemmas 4.4.3, 4.4.4 and from the definition 4.1.10. \square

THEOREM 4.4.5. *Let D be commutative ring. Let*

$$\bar{e}_i = \{e_{i \cdot i} : i \in I_i\}$$

be basis of D -module A_i , $i = 1, \dots, n$. Let

$$\bar{e}_B = \{e_{B \cdot i} : i \in I\}$$

be basis of D -module B . The set

$$(4.4.6) \quad \begin{aligned} \bar{h} = \{ & h_{i_1 \dots i_n}^{i_1 \dots i_n} \in \mathcal{L}(D; A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow B) : i \in I, i_i \in I_i, i = 1, \dots, n, \\ & h_{i_1 \dots i_n}^{i_1 \dots i_n} \circ (e_{1 \cdot j_1}, \dots, e_{n \cdot j_n}) = \delta_{j_1}^{i_1} \dots \delta_{j_n}^{i_n} e_{B \cdot i} \} \end{aligned}$$

is the basis of D -module $\mathcal{L}(D; A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow B)$.

PROOF.

LEMMA 4.4.6. *Maps $h_{i_1 \dots i_n}^{i_1 \dots i_n}$ are linear independent.*

PROOF. Let there exist D -numbers $c_{i_1 \dots i_n}^i$ such that

$$c_{i_1 \dots i_n}^i h_{i_1 \dots i_n}^{i_1 \dots i_n} = 0$$

Then for any set of indices j_1, \dots, j_n

$$0 = c_{i_1 \dots i_n}^i h_{i_1 \dots i_n}^{i_1 \dots i_n} \circ (e_{1 \cdot j_1}, \dots, e_{n \cdot j_n}) = c_{i_1 \dots i_n}^i \delta_{j_1}^{i_1} \dots \delta_{j_n}^{i_n} e_{B \cdot i} = c_{j_1 \dots j_n}^i e_{B \cdot i}$$

Therefore, $c_{j_1 \dots j_n}^i = 0$. The lemma follows from the definition 4.1.8. \odot

LEMMA 4.4.7. *The map $f \in \mathcal{L}(D; A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow B)$ is linear composition of maps $h_{i_1 \dots i_n}^{i_1 \dots i_n}$.*

PROOF. For any A_1 -number a_1

$$(4.4.7) \quad a_1 = a_1^{i_1} e_{1 \cdot i_1}$$

..., for any A_n -number a_n

$$(4.4.8) \quad a_n = a_n^{i_n} e_{n \cdot i_n}$$

the equality

$$(4.4.9) \quad \begin{aligned} h_{i_1 \dots i_n}^{i_1 \dots i_n} \circ (a_1, \dots, a_n) &= h_{i_1 \dots i_n}^{i_1 \dots i_n} \circ (a_1^{j_1} e_{1 \cdot j_1}, \dots, a_n^{j_n} e_{n \cdot j_n}) \\ &= a_1^{j_1} \dots a_n^{j_n} (h_{i_1 \dots i_n}^{i_1 \dots i_n} \circ (e_{1 \cdot j_1}, \dots, e_{n \cdot j_n})) \\ &= a_1^{j_1} \dots a_n^{j_n} \delta_{j_1}^{i_1} \dots \delta_{j_n}^{i_n} e_{B \cdot i} \\ &= a_1^{i_1} \dots a_n^{i_n} e_{B \cdot i} \end{aligned}$$

follows from equalities (4.4.6), (4.4.7), (4.4.8) and from the theorem 4.2.2. The equality

$$(4.4.10) \quad \begin{aligned} f \circ (a_1, \dots, a_n) &= f \circ (a_1^{j_1} e_{1 \cdot j_1}, \dots, a_n^{j_n} e_{n \cdot j_n}) \\ &= a_1^{j_1} \dots a_n^{j_n} f \circ (e_{1 \cdot j_1}, \dots, e_{n \cdot j_n}) \end{aligned}$$

follows from equalities (4.4.7), (4.4.8). Since

$$f \circ (e_{1 \cdot j_1}, \dots, e_{n \cdot j_n}) \in B$$

then

$$(4.4.11) \quad f \circ (e_{1 \cdot j_1}, \dots, e_{n \cdot j_n}) = f_{j_1 \dots j_n}^i e_i$$

The equality

$$(4.4.12) \quad \begin{aligned} f \circ (a_1, \dots, a_n) &= a_1^{i_1} \dots a_n^{i_n} f_{i_1 \dots i_n}^{i_1 \dots i_n} e_i \\ &= f_{i_1 \dots i_n}^{i_1 \dots i_n} h_{i_1 \dots i_n}^{i_1 \dots i_n} \circ (a_1, \dots, a_n) \end{aligned}$$

follows from equalities (4.4.9), (4.4.10), (4.4.11). The equality

$$f = f_{i_1 \dots i_n}^{i_1 \dots i_n} h_{i_1 \dots i_n}^{i_1 \dots i_n}$$

follows from equalities (4.3.2), (4.3.10), (4.4.12). \odot

The theorem follows from lemmas 4.4.6, 4.4.7 and from the definition 4.1.10. \square

THEOREM 4.4.8. *Let A_1, \dots, A_n, B be free modules over commutative ring D . D -module $\mathcal{L}(D; A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow B)$ is free D -module.*

PROOF. The theorem follows from the theorem 4.4.5. \square

4.5. Tensor Product of D -Modules

THEOREM 4.5.1. *The commutative ring D is Abelian multiplicative Ω -group.*

PROOF. Let the product \circ in the ring D be defined according to rule

$$a \circ b = ab$$

Since the product in the ring is distributive over addition, the theorem follows from definitions 3.1.5, 3.1.8. \square

THEOREM 4.5.2. *There exists **tensor product** $A_1 \otimes \dots \otimes A_n$ of D -modules A_1, \dots, A_n .*

PROOF. The theorem follows from the definition 4.1.2 and from theorems 3.3.5, 4.5.1. \square

THEOREM 4.5.3. *Let D be the commutative ring. Let A_1, \dots, A_n be D -modules. Tensor product is distributive over sum*

$$(4.5.1) \quad \begin{aligned} &a_1 \otimes \dots \otimes (a_i + b_i) \otimes \dots \otimes a_n \\ &= a_1 \otimes \dots \otimes a_i \otimes \dots \otimes a_n + a_1 \otimes \dots \otimes b_i \otimes \dots \otimes a_n \\ &a_i, b_i \in A_i \end{aligned}$$

The representation of the ring D in tensor product is defined by equality

$$(4.5.2) \quad \begin{aligned} &a_1 \otimes \dots \otimes (ca_i) \otimes \dots \otimes a_n = c(a_1 \otimes \dots \otimes a_i \otimes \dots \otimes a_n) \\ &a_i \in A_i \quad c \in D \end{aligned}$$

PROOF. The equality (4.5.1) follows from the equality (3.3.23). The equality (4.5.2) follows from the equality (3.3.24). \square

THEOREM 4.5.4. *Let A_1, \dots, A_n be modules over commutative ring D . Let*

$$f : A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow A_1 \otimes \dots \otimes A_n$$

be polylinear map defined by the equality

$$(4.5.3) \quad f \circ (d_1, \dots, d_n) = d_1 \otimes \dots \otimes d_n$$

Let

$$g : A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow V$$

be polylinear map into D -module V . There exists a linear map

$$h : A_1 \otimes \dots \otimes A_n \rightarrow V$$

such that the diagram

$$(4.5.4) \quad \begin{array}{ccc} & & A_1 \otimes \dots \otimes A_n \\ & \nearrow f & \downarrow h \\ A_1 \times \dots \times A_n & & V \\ & \searrow g & \end{array}$$

is commutative. The map h is defined by the equality

$$(4.5.5) \quad h(a_1 \otimes \dots \otimes a_n) = g(a_1, \dots, a_n)$$

PROOF. The theorem follows from the theorem 3.3.10 and from definitions 4.2.1, 4.3.1. \square

THEOREM 4.5.5. The map

$$(v_1, \dots, v_n) \in V_1 \times \dots \times V_n \rightarrow v_1 \otimes \dots \otimes v_n \in V_1 \otimes \dots \otimes V_n$$

is polylinear map.

PROOF. The theorem follows from the theorem 3.3.9 and from the definition 4.3.1. \square

THEOREM 4.5.6. Tensor product $A_1 \otimes \dots \otimes A_n$ of free finite dimensional modules A_1, \dots, A_n over the commutative ring D is free finite dimensional module.

Let \bar{e}_i be the basis of module A_i over ring D . We can represent any tensor $a \in A_1 \otimes \dots \otimes A_n$ in the following form

$$(4.5.6) \quad a = a^{i_1 \dots i_n} e_{1 \cdot i_1} \otimes \dots \otimes e_{n \cdot i_n}$$

Expression $a^{i_1 \dots i_n}$ is called **standard component of tensor**.

PROOF. Vector $a_i \in A_i$ has expansion

$$a_i = a_i^k \bar{e}_{i \cdot k}$$

relative to basis \bar{e}_i . From equalities (4.5.1), (4.5.2), it follows

$$a_1 \otimes \dots \otimes a_n = a_1^{i_1} \dots a_n^{i_n} e_{1 \cdot i_1} \otimes \dots \otimes e_{n \cdot i_n}$$

Since set of tensors $a_1 \otimes \dots \otimes a_n$ is the generating set of module $A_1 \otimes \dots \otimes A_n$, then we can write tensor $a \in A_1 \otimes \dots \otimes A_n$ in form

$$(4.5.7) \quad a = a^s a_{s \cdot 1}^{i_1} \dots a_{s \cdot n}^{i_n} e_{1 \cdot i_1} \otimes \dots \otimes e_{n \cdot i_n}$$

where $a^s, a_{s \cdot 1}^{i_1}, \dots, a_{s \cdot n}^{i_n} \in F$. Let

$$a^s a_{s \cdot 1}^{i_1} \dots a_{s \cdot n}^{i_n} = a^{i_1 \dots i_n}$$

Then equality (4.5.7) has form (4.5.6).

Therefore, set of tensors $e_{1 \cdot i_1} \otimes \dots \otimes e_{n \cdot i_n}$ is the generating set of module $A_1 \otimes \dots \otimes A_n$. Since the dimension of module A_i , $i = 1, \dots, n$, is finite, then the set of tensors $e_{1 \cdot i_1} \otimes \dots \otimes e_{n \cdot i_n}$ is finite. Therefore, the set of tensors $e_{1 \cdot i_1} \otimes \dots \otimes e_{n \cdot i_n}$ contains a basis of module $A_1 \otimes \dots \otimes A_n$, and the module $A_1 \otimes \dots \otimes A_n$ is free module over the ring D . \square

CHAPTER 5

D-Algebra

5.1. Algebra over Commutative Ring

DEFINITION 5.1.1. Let D be commutative ring. D -module A is called **algebra over ring D** or **D -algebra**, if we defined product^{5.1} in A

$$(5.1.1) \quad v w = C \circ (v, w)$$

where C is bilinear map

$$C : A \times A \rightarrow A$$

If A is free D -module, then A is called **free algebra over ring D** . □

THEOREM 5.1.2. The multiplication in the algebra A is distributive over addition.

PROOF. The statement of the theorem follows from the chain of equations

$$\begin{aligned} (a + b)c &= f \circ (a + b, c) = f \circ (a, c) + f \circ (b, c) = ac + bc \\ a(b + c) &= f \circ (a, b + c) = f \circ (a, b) + f \circ (a, c) = ab + ac \end{aligned}$$

□

The multiplication in algebra can be neither commutative nor associative. Following definitions are based on definitions given in [10], p. 13.

DEFINITION 5.1.3. The **commutator**

$$[a, b] = ab - ba$$

measures commutativity in D -algebra A . D -algebra A is called **commutative**, if

$$[a, b] = 0$$

□

DEFINITION 5.1.4. The **associator**

$$(5.1.2) \quad (a, b, c) = (ab)c - a(bc)$$

measures associativity in D -algebra A . D -algebra A is called **associative**, if

$$(a, b, c) = 0$$

□

^{5.1}I follow the definition given in [10], p. 1, [8], p. 4. The statement which is true for any D -module, is true also for D -algebra.

THEOREM 5.1.5. Let A be algebra over commutative ring D .^{5.2}

$$(5.1.3) \quad a(b, c, d) + (a, b, c)d = (ab, c, d) - (a, bc, d) + (a, b, cd)$$

for any $a, b, c, d \in A$.

PROOF. The equation (5.1.3) follows from the chain of equations

$$\begin{aligned} a(b, c, d) + (a, b, c)d &= a((bc)d - b(cd)) + ((ab)c - a(bc))d \\ &= a((bc)d - a(b(cd)) + ((ab)c)d - (a(bc))d) \\ &= ((ab)c)d - (ab)(cd) + (ab)(cd) \\ &\quad + a((bc)d - a(b(cd)) - (a(bc))d) \\ &= (ab, c, d) - (a(bc))d + a((bc)d) + (ab)(cd) - a(b(cd)) \\ &= (ab, c, d) - (a, (bc), d) + (a, b, cd) \end{aligned}$$

□

DEFINITION 5.1.6. The set^{5.3}

$$N(A) = \{a \in A : \forall b, c \in A, (a, b, c) = (b, a, c) = (b, c, a) = 0\}$$

is called the **nucleus of an D -algebra A** .

□

DEFINITION 5.1.7. The set^{5.4}

$$Z(A) = \{a \in A : a \in N(A), \forall b \in A, ab = ba\}$$

is called the **center of an D -algebra A** .

□

THEOREM 5.1.8. Let D be commutative ring. If D -algebra A has unit, then there exists an isomorphism f of the ring D into the center of the algebra A .

PROOF. Let $e \in A$ be the unit of the algebra A . Then $f \circ a = ae$.

□

Let \bar{e} be the basis of free algebra A over ring D . If algebra A has unit, then we assume that e_0 is the unit of algebra A .

THEOREM 5.1.9. Let \bar{e} be the basis of free algebra A over ring D . Let

$$a = a^i e_i \quad b = b^j e_j \quad a, b \in A$$

We can get the product of a, b according to rule

$$(5.1.4) \quad (ab)^k = C_{ij}^k a^i b^j$$

where C_{ij}^k are **structural constants** of algebra A over ring D . The product of basis vectors in the algebra A is defined according to rule

$$(5.1.5) \quad e_i e_j = C_{ij}^k e_k$$

PROOF. The equation (5.1.5) is corollary of the statement that \bar{e} is the basis of the algebra A . Since the product in the algebra is a bilinear map, then we can write the product of a and b as

$$(5.1.6) \quad ab = a^i b^j e_i e_j$$

^{5.2}The statement of the theorem is based on the equation [10]-(2.4).

^{5.3}The definition is based on the similar definition in [10], p. 13

^{5.4}The definition is based on the similar definition in [10], p. 14

From equations (5.1.5), (5.1.6), it follows that

$$(5.1.7) \quad ab = a^i b^j C_{ij}^k e_k$$

Since \bar{e} is a basis of the algebra A , then the equation (5.1.4) follows from the equation (5.1.7). \square

THEOREM 5.1.10. *Since the algebra A is commutative, then*

$$(5.1.8) \quad C_{ij}^p = C_{ji}^p$$

Since the algebra A is associative, then

$$(5.1.9) \quad C_{ij}^p C_{pk}^q = C_{ip}^q C_{jk}^p$$

PROOF. For commutative algebra, the equation (5.1.8) follows from equation

$$e_i e_j = e_j e_i$$

For associative algebra, the equation (5.1.9) follows from equation

$$(e_i e_j) e_k = e_i (e_j e_k)$$

\square

THEOREM 5.1.11. *The representation*

$$(5.1.10) \quad f_{2,3} : A \dashrightarrow A$$

of D -module A in D -module A is equivalent to structure of D -algebra A .

PROOF.

- Let the structure of D -algebra A defined in D -module A , be generated by product

$$vw = C \circ (v, w)$$

According to definitions 5.1.1 and 4.3.1, **left shift of D -module A** defined by equation

$$(5.1.11) \quad l \circ v : w \in A \rightarrow vw \in A$$

is linear map. According to the definition 4.2.1, the map $l(v)$ is endomorphism of D -module A .

The equation

$$(5.1.12) \quad (l \circ (v_1 + v_2)) \circ w = (v_1 + v_2)w = v_1w + v_2w = (l \circ v_1) \circ w + (l \circ v_2) \circ w$$

follows from the definition 4.3.1 and from the equation (5.1.11). According to the theorem 4.2.3, the equation

$$(5.1.13) \quad l \circ (v_1 + v_2) = l \circ v_1 + l \circ v_2$$

follows from equation (5.1.12). The equation

$$(5.1.14) \quad (l \circ (dv)) \circ w = (dv)w = d(vw) = d((l \circ v) \circ w)$$

follows from the definition 4.3.1 and from the equation (5.1.11). According to the theorem 4.2.3, the equation

$$(5.1.15) \quad l \circ (dv) = d(l \circ v)$$

follows from equation (5.1.14). From equations (5.1.13), (5.1.15), it follows that the map

$$f_{2,3} : v \rightarrow l \circ v$$

is the representation of D -module A in D -module A

$$(5.1.16) \quad f_{2,3} : A \dashrightarrow A \quad f_{2,3} \circ v : w \rightarrow (l \circ v) \circ w$$

- Consider the representation (5.1.10) of D -module A in D -module A . Since map $f_{2,3} \circ v$ is endomorphism of D -module A , then

$$(5.1.17) \quad \begin{aligned} (f_{2,3} \circ v)(w_1 + w_2) &= (f_{2,3} \circ v) \circ w_1 + (f_{2,3} \circ v) \circ w_2 \\ (f_{2,3} \circ v) \circ (dw) &= d((f_{2,3} \circ v) \circ w) \end{aligned}$$

Since the map (5.1.10) is linear map

$$f_{2,3} : A \rightarrow \mathcal{L}(D; A; A)$$

then, according to theorems 4.2.3, 4.2.4,

$$(5.1.18) \quad (f_{2,3} \circ (v_1 + v_2)) \circ w = (f_{2,3} \circ v_1 + f_{2,3} \circ v_2)(w) = (f_{2,3} \circ v_1) \circ w + (f_{2,3} \circ v_2) \circ w$$

$$(5.1.19) \quad (f_{2,3} \circ (dv)) \circ w = (d(f_{2,3} \circ v)) \circ w = d((f_{2,3} \circ v) \circ w)$$

From equations (5.1.17), (5.1.18), (5.1.19) and the definition 4.3.1, it follows that the map $f_{2,3}$ is bilinear map. Therefore, the map $f_{2,3}$ determines the product in D -module A according to rule

$$vw = (f_{2,3} \circ v) \circ w$$

□

COROLLARY 5.1.12. D is commutative ring, A is Abelian group. The diagram of representations

$$(5.1.20) \quad \begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{g_{1,2}} & A \xrightarrow{g_{2,3}} A \\ & & \uparrow g_{1,2} \\ & & D \end{array} \quad \begin{aligned} g_{1,2}(d) : v &\rightarrow dv \\ g_{2,3}(v) : w &\rightarrow C \circ (v, w) \\ C &\in \mathcal{L}(D; A^2 \rightarrow A) \end{aligned}$$

generates the structure of D -algebra A .

□

5.2. Linear Homomorphism

THEOREM 5.2.1. Let diagram of representations

$$(5.2.1) \quad \begin{array}{ccc} D_1 & \xrightarrow{g_{1,1,2}} & A_1 \xrightarrow{g_{1,2,3}} A_1 \\ & & \uparrow g_{1,1,2} \\ & & D_1 \end{array} \quad \begin{aligned} g_{1,1,2}(d) : v &\rightarrow dv \\ g_{1,2,3}(v) : w &\rightarrow C_1 \circ (v, w) \\ C_1 &\in \mathcal{L}(D_1; A_1^2 \rightarrow A_1) \end{aligned}$$

describe D_1 -algebra A_1 . Let diagram of representations

$$(5.2.2) \quad \begin{array}{ccc} D_2 & \xrightarrow{g_{2,1,2}} & A_2 \xrightarrow{g_{2,2,3}} A_2 \\ & & \uparrow g_{2,1,2} \\ & & D_2 \end{array} \quad \begin{aligned} g_{2,1,2}(d) : v &\rightarrow dv \\ g_{2,2,3}(v) : w &\rightarrow C_2 \circ (v, w) \\ C_2 &\in \mathcal{L}(D_2; A_2^2 \rightarrow A_2) \end{aligned}$$

describe D_2 -algebra A_2 . Morphism of D_1 -algebra A_1 into D_2 -algebra A_2 is tuple of maps

$$r_1 : D_1 \rightarrow D_2 \quad r_2 : A_1 \rightarrow A_2$$

where the map r_1 is homomorphism of ring D_1 into ring D_2 and the map r_2 is linear map of D_1 -algebra A_1 into D_2 -algebra A_2 such that

$$(5.2.3) \quad r_2(ab) = r_2(a)r_2(b)$$

PROOF. According to the equation [4]-(4.2.3), morphism (r_1, r_2) of representation $f_{1,2}$ satisfies to the equation

$$(5.2.4) \quad \begin{aligned} r_2(f_{1,2}(d)(a)) &= f_{2,1,2}(r_1(d))(r_2(a)) \\ r_2(da) &= r_1(d)r_2(a) \end{aligned}$$

Therefore, the map (r_1, r_2) is linear map.

According to equations [4]-(4.2.3), the morphism (r_2, r_2) of representation $f_{2,3}$ satisfies to the equation^{5.5}

$$(5.2.5) \quad r_2(f_{1,2,3}(a_2)(a_3)) = f_{2,2,3}(r_2(a_2))(r_2(a_3))$$

From equations (5.2.5), (5.2.1), (5.2.2), it follows that

$$(5.2.6) \quad r_2(C_1(v, w)) = C_2(r_2(v), r_2(w))$$

Equation (5.2.3) follows from equations (5.2.6), (5.1.1). □

DEFINITION 5.2.2. The morphism of representations of D_1 -algebra A_1 into D_2 -algebra A_2 is called **linear homomorphism** of D_1 -algebra A_1 into D_2 -algebra A_2 . □

THEOREM 5.2.3. Let \bar{e}_1 be the basis of D_1 -algebra A_1 . Let \bar{e}_2 be the basis of D_2 -algebra A_2 . Then linear homomorphism^{5.6} (r_1, r_2) of D_1 -algebra A_1 into D_2 -algebra A_2 has presentation^{5.7}

$$(5.2.7) \quad b = e_{2*}^* r_{2*}^* r_1(a) = e_{2 \cdot i} r_{2 \cdot j}^i r_1(a^j)$$

$$(5.2.8) \quad b = r_{2*}^* r_1(a)$$

relative to selected bases. Here

- a is coordinate matrix of vector \bar{a} relative the basis \bar{e}_1 .
- b is coordinate matrix of vector

$$b = r_2(a)$$

relative the basis \bar{e}_2 .

- r_2 is coordinate matrix of set of vectors $(r_2(e_{1 \cdot i}))$ relative the basis \bar{e}_2 .
The matrix r_2 is called **matrix of linear homomorphism** relative bases \bar{e}_1 and \bar{e}_2 .

PROOF. Vector $\bar{a} \in A_1$ has expansion

$$\bar{a} = e_{1*}^* a$$

relative to the basis \bar{e}_1 . Vector $\bar{b} \in A_2$ has expansion

$$(5.2.9) \quad \bar{b} = e_{2*}^* b$$

^{5.5}Since in diagrams of representations (5.2.1), (5.2.2), supports of Ω_2 -algebra and Ω_3 -algebra coincide, then morphisms of representations on levels 2 and 3 coincide also.

^{5.6}This theorem is similar to the theorem [3]-5.4.3.

^{5.7}We define product of matrices over commutative ring only as $*$ -product. However, I prefer to explicitly specify the operation, because in such case we see that this is expression with matrices. In addition, I expect to consider similar statement in non commutative case.

relative to the basis \bar{e}_2 .

Since (r_1, r_2) is a linear homomorphism, then from (5.2.4), it follows that

$$(5.2.10) \quad b = r_2(a) = r_2(e_1 * a) = r_2(e_1) * r_1(a)$$

where

$$r_1(a) = \begin{pmatrix} r_1(a^1) \\ \dots \\ r_1(a^n) \end{pmatrix}$$

$r_2(e_{1 \cdot i})$ is also a vector of D -module A_2 and has expansion

$$(5.2.11) \quad r_2(e_{1 \cdot i}) = e_{2 \cdot *} * r_{2 \cdot i} = e_{2 \cdot j} r_{2 \cdot i}^j$$

relative to basis \bar{e}_2 . Combining (5.2.10) and (5.2.11) we get (5.2.7). (5.2.8) follows from comparison of (5.2.9) and (5.2.7) and theorem [3]-5.3.3. \square

THEOREM 5.2.4. *Let \bar{e}_1 be the basis of $D_1 \star$ -algebra A_1 . Let \bar{e}_2 be the basis of $D_2 \star$ -algebra A_2 . If the map r_1 is injection, then there is relation between the matrix of linear homomorphism and structural constants*

$$(5.2.12) \quad r_{2 \cdot k}^l r_1(C_{1 \cdot ij}^k) = C_{2 \cdot pq}^l r_{2 \cdot i}^p r_{2 \cdot j}^q$$

PROOF. Let

$$\bar{a}, \bar{b} \in A_1 \quad \bar{a} = e_{1 \cdot *} * a \quad \bar{b} = e_{1 \cdot *} * b$$

From equations (5.1.4), (5.1.1), (5.2.1), it follows that

$$(5.2.13) \quad ab = e_{1 \cdot k} C_{1 \cdot ij}^k a^i b^j$$

From equations (5.2.4), (5.2.13), it follows that

$$(5.2.14) \quad r_2(ab) = r_2(e_{1 \cdot k}) r_1(C_{1 \cdot ij}^k a^i b^j)$$

Since the map r_1 is homomorphism of rings, then from equation (5.2.14), it follows that

$$(5.2.15) \quad r_2(ab) = r_2(e_{1 \cdot k}) r_1(C_{1 \cdot ij}^k) r_1(a^i) r_1(b^j)$$

From the theorem 5.2.3 and the equation (5.2.15), it follows that

$$(5.2.16) \quad r_2(ab) = e_{2 \cdot l} r_{2 \cdot k}^l r_1(C_{1 \cdot ij}^k) r_1(a^i) r_1(b^j)$$

From the equation (5.2.3) and the theorem 5.2.3, it follows that

$$(5.2.17) \quad r_2(ab) = r_2(a) r_2(b) = e_{2 \cdot p} r_1(a^i) r_{2 \cdot i}^p e_{2 \cdot q} r_1(b^j) r_{2 \cdot j}^q$$

From equations (5.1.4), (5.1.1), (5.2.2), (5.2.17), it follows that

$$(5.2.18) \quad r_2(ab) = e_{2 \cdot l} C_{2 \cdot pq}^l r_1(a^i) r_{2 \cdot i}^p r_1(b^j) r_{2 \cdot j}^q$$

From equations (5.2.16), (5.2.18), it follows that

$$(5.2.19) \quad e_{2 \cdot l} r_{2 \cdot k}^l r_1(C_{1 \cdot ij}^k) r_1(a^i) r_1(b^j) = e_{2 \cdot l} C_{2 \cdot pq}^l r_1(a^i) r_{2 \cdot i}^p r_1(b^j) r_{2 \cdot j}^q$$

The equation (5.2.12) follows from the equation (5.2.19), because vectors of basis \bar{e}_2 are linear independent, and a^i, b^i (and therefore, $r_1(a^i), r_1(b^i)$) are arbitrary values. \square

5.3. Linear Automorphism of Quaternion Algebra

Determining of coordinates of linear automorphism is not a simple task. In this section we consider example of nontrivial linear automorphism of quaternion algebra.

THEOREM 5.3.1. *Coordinates of linear automorphism of quaternion algebra satisfy to the system of equations*

$$(5.3.1) \quad \begin{cases} r_1^1 = r_2^2 r_3^3 - r_2^3 r_3^2 & r_1^2 = r_3^2 r_1^3 - r_3^3 r_1^2 & r_1^3 = r_1^2 r_2^3 - r_1^3 r_2^2 \\ r_1^2 = r_2^3 r_1^3 - r_2^1 r_3^3 & r_2^2 = r_3^3 r_1^1 - r_3^1 r_1^3 & r_2^3 = r_1^3 r_1^2 - r_1^1 r_2^3 \\ r_1^3 = r_2^1 r_3^2 - r_2^2 r_3^1 & r_2^3 = r_3^1 r_1^2 - r_3^2 r_1^1 & r_3^3 = r_1^1 r_2^2 - r_1^2 r_2^1 \end{cases}$$

PROOF. According to the theorems [5]-4.3.1, 5.2.4, linear automorphism of quaternion algebra satisfies to equations

$$(5.3.2) \quad \begin{aligned} r_0^l &= r_0^p r_0^q C_{pq}^l & r_1^l &= r_0^p r_1^q C_{pq}^l & r_2^l &= r_0^p r_2^q C_{pq}^l & r_3^l &= r_0^p r_3^q C_{pq}^l \\ r_1^l &= r_1^p r_0^q C_{pq}^l & -r_0^l &= r_1^p r_1^q C_{pq}^l & r_3^l &= r_1^p r_2^q C_{pq}^l & -r_2^l &= r_1^p r_3^q C_{pq}^l \\ r_2^l &= r_2^p r_0^q C_{pq}^l & -r_3^l &= r_2^p r_1^q C_{pq}^l & -r_0^l &= r_2^p r_2^q C_{pq}^l & r_0^l &= r_2^p r_3^q C_{pq}^l \\ r_3^l &= r_3^p r_0^q C_{pq}^l & r_2^l &= r_3^p r_1^q C_{pq}^l & -r_1^l &= r_3^p r_2^q C_{pq}^l & -r_0^l &= r_3^p r_3^q C_{pq}^l \end{aligned}$$

From the equation (5.3.2), it follows that

$$(5.3.3) \quad \begin{aligned} r_1^l &= r_0^p r_1^q C_{pq}^l = r_2^p r_3^q C_{pq}^l & r_0^p r_1^q C_{pq}^l &= r_0^p r_1^q C_{qp}^l & r_2^p r_3^q C_{pq}^l &= -r_2^p r_3^q C_{qp}^l \\ r_2^l &= r_0^p r_2^q C_{pq}^l = r_3^p r_1^q C_{pq}^l & r_0^p r_2^q C_{pq}^l &= r_0^p r_2^q C_{qp}^l & r_3^p r_1^q C_{pq}^l &= -r_3^p r_1^q C_{qp}^l \\ r_3^l &= r_0^p r_3^q C_{pq}^l = r_1^p r_2^q C_{pq}^l & r_0^p r_3^q C_{pq}^l &= r_0^p r_3^q C_{qp}^l & r_1^p r_2^q C_{pq}^l &= -r_1^p r_2^q C_{qp}^l \end{aligned}$$

$$(5.3.4) \quad r_0^l = r_0^p r_0^q C_{pq}^l = -r_1^p r_1^q C_{pq}^l = -r_2^p r_2^q C_{pq}^l = -r_3^p r_3^q C_{pq}^l$$

If $l = 0$, then from the equation

$$C_{pq}^0 = C_{qp}^0$$

it follows that

$$(5.3.5) \quad r_i^p r_j^q C_{pq}^0 = r_i^p r_j^q C_{qp}^0$$

From the equation (5.3.3) for $l = 0$ and the equation (5.3.5), it follows that

$$(5.3.6) \quad r_1^0 = r_2^0 = r_3^0 = 0$$

If $l = 1, 2, 3$, then we can write the equation (5.3.3) in the following form

$$(5.3.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} r_i^l = r_0^l r_i^0 C_{l0}^l + r_0^0 r_i^l C_{0l}^l + r_0^a r_i^b C_{ab}^l + r_0^b r_i^a C_{ba}^l \\ \quad r_0^l r_i^0 C_{l0}^l + r_0^0 r_i^l C_{0l}^l + r_0^a r_i^b C_{ab}^l + r_0^b r_i^a C_{ba}^l \\ = r_0^l r_i^0 C_{0l}^l + r_0^0 r_i^l C_{l0}^l + r_0^a r_i^b C_{ba}^l + r_0^b r_i^a C_{ab}^l \\ \quad i = 1, 2, 3 \\ r_i^l = r_k^0 r_j^l C_{0l}^l + r_k^l r_j^0 C_{l0}^l + r_k^a r_j^b C_{ab}^l + r_k^b r_j^a C_{ba}^l \\ \quad r_k^0 r_j^l C_{0l}^l + r_k^l r_j^0 C_{l0}^l + r_k^a r_j^b C_{ab}^l + r_k^b r_j^a C_{ba}^l \\ = -r_k^0 r_j^l C_{l0}^l - r_k^l r_j^0 C_{0l}^l - r_k^a r_j^b C_{ba}^l - r_k^b r_j^a C_{ab}^l \\ \quad i = 1 \quad k = 2 \quad j = 3 \\ \quad i = 2 \quad k = 3 \quad j = 1 \\ \quad i = 3 \quad k = 1 \quad j = 2 \\ \quad 0 < a < b \quad a \neq l \quad b \neq l \end{array} \right.$$

From equations (5.3.7), (5.3.6) and equations

$$(5.3.8) \quad \begin{aligned} C_{0l}^l &= C_{l0}^l = 1 \\ C_{ab}^l &= -C_{ba}^l \end{aligned}$$

it follows that

$$(5.3.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} r_i^l = r_0^0 r_i^l + r_0^a r_i^b C_{ab}^l - r_0^b r_i^a C_{ab}^l \\ \quad r_0^0 r_i^l + r_0^a r_i^b C_{ab}^l - r_0^b r_i^a C_{ab}^l \\ = r_0^0 r_i^l - r_0^a r_i^b C_{ab}^l + r_0^b r_i^a C_{ab}^l \\ \quad i = 1, 2, 3 \\ r_i^l = r_k^a r_j^b C_{ab}^l - r_k^b r_j^a C_{ab}^l \\ \quad r_k^a r_j^b C_{ab}^l - r_k^b r_j^a C_{ab}^l \\ = r_k^a r_j^b C_{ab}^l - r_k^b r_j^a C_{ab}^l \\ \quad i = 1 \quad k = 2 \quad j = 3 \\ \quad i = 2 \quad k = 3 \quad j = 1 \\ \quad i = 3 \quad k = 1 \quad j = 2 \\ \quad 0 < a < b \quad a \neq l \quad b \neq l \end{array} \right.$$

From equations (5.3.9) it follows that

$$(5.3.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} r_i^l = r_0^0 r_i^l \\ r_0^a r_i^b - r_0^b r_i^a = 0 \\ i = 1, 2, 3 \\ r_i^l = r_k^a r_j^b C_{ab}^l - r_k^b r_j^a C_{ab}^l \\ i = 1 \quad k = 2 \quad j = 3 \\ i = 2 \quad k = 3 \quad j = 1 \\ i = 3 \quad k = 1 \quad j = 2 \\ 0 < a < b \quad a \neq l \quad b \neq l \end{array} \right.$$

From the equation (5.3.10) it follows that

$$(5.3.11) \quad r_0^0 = 1$$

From the equation (5.3.4) for $l = 0$, it follows that

$$(5.3.12) \quad \begin{aligned} r_0^0 &= r_0^0 r_0^0 - r_0^1 r_0^1 - r_0^2 r_0^2 - r_0^3 r_0^3 \\ &= -r_i^0 r_i^0 + r_i^1 r_i^1 + r_i^2 r_i^2 + r_i^3 r_i^3 \\ i &= 1, 2, 3 \end{aligned}$$

From equations (5.3.6), (5.3.10), (5.3.12), it follows that

$$(5.3.13) \quad \begin{aligned} 0 &= r_0^1 r_0^1 + r_0^2 r_0^2 + r_0^3 r_0^3 \\ 1 &= r_i^1 r_i^1 + r_i^2 r_i^2 + r_i^3 r_i^3 \\ i &= 1, 2, 3 \end{aligned}$$

From equations (5.3.13) it follows that^{5.8}

$$(5.3.14) \quad r_0^1 = r_0^2 = r_0^3 = 0$$

From the equation (5.3.4) for $l > 0$, it follows that

$$(5.3.15) \quad \begin{aligned} r_0^l &= r_0^l r_0^0 C_{l0}^l + r_0^0 r_0^l C_{0l}^l + r_0^a r_0^b C_{ab}^l + r_0^b r_0^a C_{ba}^l \\ &= -r_i^l r_i^0 C_{l0}^l - r_i^0 r_i^l C_{0l}^l - r_i^a r_i^b C_{ab}^l - r_i^b r_i^a C_{ba}^l \\ i &> 0 \\ l &> 0 \quad 0 < a < b \quad a \neq l \quad b \neq l \end{aligned}$$

^{5.8}Here, we rely on the fact that quaternion algebra is defined over real field. If we consider quaternion algebra over complex field, then the equation (5.3.13) defines a cone in the complex space. Correspondingly, we have wider choice of coordinates of linear automorphism.

Equations (5.3.15) are identically true by equations (5.3.6), (5.3.14), (5.3.8). From equations (5.3.14), (5.3.10), it follows that

$$(5.3.16) \quad \left\{ \begin{array}{l} r_i^l = r_k^a r_j^b C_{ab}^l - r_k^b r_j^a C_{ab}^l \\ i = 1 \quad k = 2 \quad j = 3 \\ i = 2 \quad k = 3 \quad j = 1 \\ i = 3 \quad k = 1 \quad j = 2 \\ l > 0 \quad 0 < a < b \quad a \neq l \quad b \neq l \end{array} \right.$$

Equations (5.3.1) follow from equations (5.3.16). \square

EXAMPLE 5.3.2. *It is evident that coordinates*

$$r_j^i = \delta_j^i$$

satisfy the equation (5.3.1). It can be verified directly that coordinates of map

$$r_0^0 = 1 \quad r_2^1 = 1 \quad r_3^2 = 1 \quad r_1^3 = 1$$

also satisfy the equation (5.3.1). The matrix of coordinates of this map has form

$$r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

According to the theorem [5]-4.3.4, standard components of the map r have form

$$\begin{array}{llll} r^{00} = \frac{1}{4} & r^{11} = -\frac{1}{4} & r^{22} = -\frac{1}{4} & r^{33} = -\frac{1}{4} \\ r^{10} = -\frac{1}{4} & r^{01} = \frac{1}{4} & r^{32} = -\frac{1}{4} & r^{23} = -\frac{1}{4} \\ r^{20} = -\frac{1}{4} & r^{31} = -\frac{1}{4} & r^{02} = \frac{1}{4} & r^{13} = -\frac{1}{4} \\ r^{30} = -\frac{1}{4} & r^{21} = -\frac{1}{4} & r^{12} = -\frac{1}{4} & r^{03} = \frac{1}{4} \end{array}$$

Therefore, the map r has form

$$\begin{aligned} r(a) &= a^0 + a^2 i + a^3 j + a^1 k \\ r(a) &= \frac{1}{4}(a - iai - jaj - kak - ia + ai - kaj - jak \\ &\quad - ja - kai + aj - iak - ka - jai - iaj + ak) \end{aligned}$$

\square

CHAPTER 6

Linear Map of Algebra

6.1. Linear Map of Algebra

DEFINITION 6.1.1. Let A_1 and A_2 be algebras over ring D . The linear map of the D -module A_1 into the D -module A_2 is called **linear map** of D -algebra A_1 into D -algebra A_2 . Let us denote $\mathcal{L}(D; A_1 \rightarrow A_2)$ set of linear maps of D -algebra A_1 into D -algebra A_2 . \square

DEFINITION 6.1.2. Let A_1, \dots, A_n, S be D -algebras. Polylinear map

$$f : A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow S$$

of D -modules A_1, \dots, A_n into D -module S is called **polylinear map** of D -algebras A_1, \dots, A_n into D -algebra S . Let us denote $\mathcal{L}(D; A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow S)$ set of polylinear maps of D -algebras A_1, \dots, A_n into D -algebra S . Let us denote $\mathcal{L}(D; A^n \rightarrow S)$ set of n -linear maps of D -algebra A ($A_1 = \dots = A_n = A$) into D -algebra S . \square

THEOREM 6.1.3. Tensor product $A_1 \otimes \dots \otimes A_n$ of D -algebras A_1, \dots, A_n is D -algebra.

PROOF. According to the definition 5.1.1 and to the theorem 4.5.2, tensor product $A_1 \otimes \dots \otimes A_n$ of D -algebras A_1, \dots, A_n is D -module.

Consider the map

$$(6.1.1) \quad * : (A_1 \times \dots \times A_n) \times (A_1 \times \dots \times A_n) \rightarrow A_1 \otimes \dots \otimes A_n$$

defined by the equation

$$(6.1.2) \quad (a_1, \dots, a_n) * (b_1, \dots, b_n) = (a_1 b_1) \otimes \dots \otimes (a_n b_n)$$

For given values of variables b_1, \dots, b_n , the map (6.1.1) is polylinear map with respect to variables a_1, \dots, a_n . According to the theorem 4.5.4, there exists a linear map

$$(6.1.3) \quad * (b_1, \dots, b_n) : A_1 \otimes \dots \otimes A_n \rightarrow A_1 \otimes \dots \otimes A_n$$

defined by the equation

$$(6.1.4) \quad (a_1 \otimes \dots \otimes a_n) * (b_1, \dots, b_n) = (a_1 b_1) \otimes \dots \otimes (a_n b_n)$$

Since we can present any tensor $a \in A_1 \otimes \dots \otimes A_n$ as sum of tensors $a_1 \otimes \dots \otimes a_n$, then, for given tensor $a \in A_1 \otimes \dots \otimes A_n$, the map (6.1.3) is polylinear map of variables b_1, \dots, b_n . According to the theorem 4.5.4, there exists a linear map

$$(6.1.5) \quad * (a) : A_1 \otimes \dots \otimes A_n \rightarrow A_1 \otimes \dots \otimes A_n$$

defined by the equation

$$(6.1.6) \quad (a_1 \otimes \dots \otimes a_n) * (b_1 \otimes \dots \otimes b_n) = (a_1 b_1) \otimes \dots \otimes (a_n b_n)$$

Therefore, the equation (6.1.6) defines bilinear map

$$(6.1.7) \quad * : (A_1 \otimes \dots \otimes A_n) \times (A_1 \otimes \dots \otimes A_n) \rightarrow A_1 \otimes \dots \otimes A_n$$

Bilinear map (6.1.7) generates the product in D -module $A_1 \otimes \dots \otimes A_n$. \square

In case of tensor product of D -algebras A_1, A_2 we consider product defined by the equation

$$(6.1.8) \quad (a_1 \otimes a_2) \circ (b_1 \otimes b_2) = (a_1 b_1) \otimes (b_2 a_2)$$

THEOREM 6.1.4. Let \bar{e}_i be the basis of the algebra A_i over the ring D . Let $B_i^{j_{kl}}$ be structural constants of the algebra A_i relative the basis \bar{e}_i . Structural constants of the tensor product $A_1 \otimes \dots \otimes A_n$ relative to the basis $e_{1 \cdot i_1} \otimes \dots \otimes e_{n \cdot i_n}$ have form

$$(6.1.9) \quad C_{\cdot k_1 \dots k_n \cdot l_1 \dots l_n}^{j_1 \dots j_n} = C_{1 \cdot k_1 l_1}^{j_1} \dots C_{n \cdot k_n l_n}^{j_n}$$

PROOF. Direct multiplication of tensors $e_{1 \cdot i_1} \otimes \dots \otimes e_{n \cdot i_n}$ has form

$$(6.1.10) \quad \begin{aligned} & (e_{1 \cdot k_1} \otimes \dots \otimes e_{n \cdot k_n})(e_{1 \cdot l_1} \otimes \dots \otimes e_{n \cdot l_n}) \\ &= (\bar{e}_{1 \cdot k_1} \bar{e}_{1 \cdot l_1}) \otimes \dots \otimes (\bar{e}_{n \cdot k_n} \bar{e}_{n \cdot l_n}) \\ &= (\bar{e}_{1 \cdot k_1} \bar{e}_{1 \cdot l_1}) \otimes \dots \otimes (\bar{e}_{n \cdot k_n} \bar{e}_{n \cdot l_n}) \\ &= (C_{1 \cdot k_1 l_1}^{j_1} \bar{e}_{1 \cdot j_1}) \otimes \dots \otimes (C_{n \cdot k_n l_n}^{j_n} \bar{e}_{n \cdot j_n}) \\ &= C_{1 \cdot k_1 l_1}^{j_1} \dots C_{n \cdot k_n l_n}^{j_n} \bar{e}_{1 \cdot j_1} \otimes \dots \otimes \bar{e}_{n \cdot j_n} \end{aligned}$$

According to the definition of structural constants

$$(6.1.11) \quad (e_{1 \cdot k_1} \otimes \dots \otimes e_{n \cdot k_n})(e_{1 \cdot l_1} \otimes \dots \otimes e_{n \cdot l_n}) = C_{\cdot k_1 \dots k_n \cdot l_1 \dots l_n}^{j_1 \dots j_n} (e_{1 \cdot j_1} \otimes \dots \otimes e_{n \cdot j_n})$$

The equation (6.1.9) follows from comparison (6.1.10), (6.1.11).

From the chain of equations

$$\begin{aligned} & (a_1 \otimes \dots \otimes a_n)(b_1 \otimes \dots \otimes b_n) \\ &= (a_1^{k_1} \bar{e}_{1 \cdot k_1} \otimes \dots \otimes a_n^{k_n} \bar{e}_{n \cdot k_n})(b_1^{l_1} \bar{e}_{1 \cdot l_1} \otimes \dots \otimes b_n^{l_n} \bar{e}_{n \cdot l_n}) \\ &= a_1^{k_1} \dots a_n^{k_n} b_1^{l_1} \dots b_n^{l_n} (\bar{e}_{1 \cdot k_1} \otimes \dots \otimes \bar{e}_{n \cdot k_n})(\bar{e}_{1 \cdot l_1} \otimes \dots \otimes \bar{e}_{n \cdot l_n}) \\ &= a_1^{k_1} \dots a_n^{k_n} b_1^{l_1} \dots b_n^{l_n} C_{\cdot k_1 \dots k_n \cdot l_1 \dots l_n}^{j_1 \dots j_n} (e_{1 \cdot j_1} \otimes \dots \otimes e_{n \cdot j_n}) \\ &= a_1^{k_1} \dots a_n^{k_n} b_1^{l_1} \dots b_n^{l_n} C_{1 \cdot k_1 l_1}^{j_1} \dots C_{n \cdot k_n l_n}^{j_n} (e_{1 \cdot j_1} \otimes \dots \otimes e_{n \cdot j_n}) \\ &= (a_1^{k_1} b_1^{l_1} C_{1 \cdot k_1 l_1}^{j_1} \bar{e}_{1 \cdot j_1}) \otimes \dots \otimes (a_n^{k_n} b_n^{l_n} C_{n \cdot k_n l_n}^{j_n} \bar{e}_{n \cdot j_n}) \\ &= (a_1 b_1) \otimes \dots \otimes (a_n b_n) \end{aligned}$$

it follows that definition of product (6.1.11) with structural constants (6.1.9) agreed with the definition of product (6.1.6). \square

THEOREM 6.1.5. For tensors $a, b \in A_1 \otimes \dots \otimes A_n$, standard components of product satisfy to equation

$$(6.1.12) \quad (ab)^{j_1 \dots j_n} = C_{\cdot k_1 \dots k_n \cdot l_1 \dots l_n}^{j_1 \dots j_n} a^{k_1 \dots k_n} b^{l_1 \dots l_n}$$

PROOF. According to the definition

$$(6.1.13) \quad ab = (ab)^{j_1 \dots j_n} e_{1 \cdot j_1} \otimes \dots \otimes e_{n \cdot j_n}$$

At the same time

$$\begin{aligned}
 (6.1.14) \quad ab &= a^{k_1 \dots k_n} e_{1 \cdot k_1} \otimes \dots \otimes e_{n \cdot k_n} b^{k_1 \dots k_n} e_{1 \cdot l_1} \otimes \dots \otimes e_{n \cdot l_n} \\
 &= a^{k_1 \dots k_n} b^{k_1 \dots k_n} C^{j_1 \dots j_n}_{k_1 \dots k_n \cdot l_1 \dots l_n} e_{1 \cdot j_1} \otimes \dots \otimes e_{n \cdot j_n}
 \end{aligned}$$

The equation (6.1.12) follows from equations (6.1.13), (6.1.14). \square

THEOREM 6.1.6. *If the algebra A_i , $i = 1, \dots, n$, is associative, then the tensor product $A_1 \otimes \dots \otimes A_n$ is associative algebra.*

PROOF. Since

$$\begin{aligned}
 &((e_{1 \cdot i_1} \otimes \dots \otimes e_{n \cdot i_n})(e_{1 \cdot j_1} \otimes \dots \otimes e_{n \cdot j_n}))(e_{1 \cdot k_1} \otimes \dots \otimes e_{n \cdot k_n}) \\
 &= ((\bar{e}_{1 \cdot i_1} \bar{e}_{1 \cdot j_1}) \otimes \dots \otimes (\bar{e}_{n \cdot i_n} \bar{e}_{n \cdot j_n}))(e_{1 \cdot k_1} \otimes \dots \otimes e_{n \cdot k_n}) \\
 &= ((\bar{e}_{1 \cdot i_1} \bar{e}_{1 \cdot j_1}) \bar{e}_{1 \cdot k_1}) \otimes \dots \otimes ((\bar{e}_{n \cdot i_n} \bar{e}_{n \cdot j_n}) \bar{e}_{n \cdot k_n}) \\
 &= (\bar{e}_{1 \cdot i_1} (\bar{e}_{1 \cdot j_1} \bar{e}_{1 \cdot k_1})) \otimes \dots \otimes (\bar{e}_{n \cdot i_n} (\bar{e}_{n \cdot j_n} \bar{e}_{n \cdot k_n})) \\
 &= (e_{1 \cdot i_1} \otimes \dots \otimes e_{n \cdot i_n})((\bar{e}_{1 \cdot j_1} \bar{e}_{1 \cdot k_1}) \otimes \dots \otimes (\bar{e}_{n \cdot j_n} \bar{e}_{n \cdot k_n})) \\
 &= (e_{1 \cdot i_1} \otimes \dots \otimes e_{n \cdot i_n})((e_{1 \cdot j_1} \otimes \dots \otimes e_{n \cdot j_n})(e_{1 \cdot k_1} \otimes \dots \otimes e_{n \cdot k_n}))
 \end{aligned}$$

then

$$\begin{aligned}
 (ab)c &= a^{i_1 \dots i_n} b^{j_1 \dots j_n} c^{k_1 \dots k_n} \\
 &((e_{1 \cdot i_1} \otimes \dots \otimes e_{n \cdot i_n})(e_{1 \cdot j_1} \otimes \dots \otimes e_{n \cdot j_n}))(e_{1 \cdot k_1} \otimes \dots \otimes e_{n \cdot k_n}) \\
 &= a^{i_1 \dots i_n} b^{j_1 \dots j_n} c^{k_1 \dots k_n} \\
 &(e_{1 \cdot i_1} \otimes \dots \otimes e_{n \cdot i_n})((e_{1 \cdot j_1} \otimes \dots \otimes e_{n \cdot j_n})(e_{1 \cdot k_1} \otimes \dots \otimes e_{n \cdot k_n})) \\
 &= a(bc)
 \end{aligned}$$

\square

THEOREM 6.1.7. *Let A be algebra over commutative ring D . There exists a linear map*

$$h : a \otimes b \in A \otimes A \rightarrow ab \in A$$

PROOF. The theorem is corollary of the definition 5.1.1 and the theorem 4.5.4. \square

THEOREM 6.1.8. *Let map*

$$f : A_1 \rightarrow A_2$$

be linear map of D -algebra A_1 into D -algebra A_2 . Then maps af , fb , a , $b \in A_2$, defined by equations

$$\begin{aligned}
 (af) \circ x &= a(f \circ x) \\
 (fb) \circ x &= (f \circ x)b
 \end{aligned}$$

are linear.

PROOF. Statement of theorem follows from chains of equations

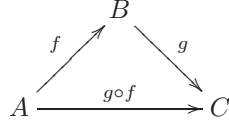
$$\begin{aligned}
 (af) \circ (x + y) &= a(f \circ (x + y)) = a(f \circ x + f \circ y) = a(f \circ x) + a(f \circ y) \\
 &= (af) \circ x + (af) \circ y \\
 (af) \circ (px) &= a(f \circ (px)) = ap(f \circ x) = pa(f \circ x) \\
 &= p((af) \circ x) \\
 (fb) \circ (x + y) &= (f \circ (x + y))b = (f \circ x + f \circ y)b = (f \circ x)b + (f \circ y)b \\
 &= (fb) \circ x + (fb) \circ y \\
 (fb) \circ (px) &= (f \circ (px))b = p(f \circ x)b \\
 &= p((fb) \circ x)
 \end{aligned}$$

□

6.2. Algebra $\mathcal{L}(D; A \rightarrow A)$

THEOREM 6.2.1. Let A, B, C be algebras over commutative ring D . Let f be linear map from D -algebra A into D -algebra B . Let g be linear map from D -algebra B into D -algebra C . The map $g \circ f$ defined by diagram

(6.2.1)



is linear map from D -algebra A into D -algebra C .

PROOF. The proof of the theorem follows from chains of equations

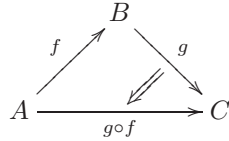
$$\begin{aligned}
 (g \circ f) \circ (a + b) &= g \circ (f \circ (a + b)) = g \circ (f \circ a + f \circ b) \\
 &= g \circ (f \circ a) + g \circ (f \circ b) = (g \circ f) \circ a + (g \circ f) \circ b \\
 (g \circ f) \circ (pa) &= g \circ (f \circ (pa)) = g \circ (p f \circ a) = p g \circ (f \circ a) \\
 &= p (g \circ f) \circ a
 \end{aligned}$$

□

THEOREM 6.2.2. Let A, B, C be algebras over the commutative ring D . Let f be a linear map from D -algebra A into D -algebra B . The map f generates a linear map

$$(6.2.2) \quad f^* : g \in \mathcal{L}(D; B \rightarrow C) \rightarrow g \circ f \in \mathcal{L}(D; A \rightarrow C)$$

(6.2.3)



PROOF. The proof of the theorem follows from chains of equations ^{6.1}

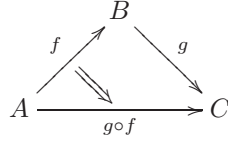
$$\begin{aligned}
 ((g_1 + g_2) \circ f) \circ a &= (g_1 + g_2) \circ (f \circ a) = g_1 \circ (f \circ a) + g_2 \circ (f \circ a) \\
 &= (g_1 \circ f) \circ a + (g_2 \circ f) \circ a \\
 &= (g_1 \circ f + g_2 \circ f) \circ a \\
 ((pg) \circ f) \circ a &= (pg) \circ (f \circ a) = p \circ g \circ (f \circ a) = p \circ (g \circ f) \circ a \\
 &= (p(g \circ f)) \circ a
 \end{aligned}$$

□

THEOREM 6.2.3. Let A, B, C be algebras over the commutative ring D . Let g be a linear map from D -algebra B into D -algebra C . The map g generates a linear map

$$(6.2.6) \quad g_* : f \in \mathcal{L}(D; A \rightarrow B) \rightarrow g \circ f \in \mathcal{L}(D; A \rightarrow C)$$

$$(6.2.7)$$



PROOF. The proof of the theorem follows from chains of equations ^{6.2}

$$\begin{aligned}
 (g \circ (f_1 + f_2)) \circ a &= g \circ ((f_1 + f_2) \circ a) = g \circ (f_1 \circ a + f_2 \circ a) \\
 &= g \circ (f_1 \circ a) + g \circ (f_2 \circ a) = (g \circ f_1) \circ a + (g \circ f_2) \circ a \\
 &= (g \circ f_1 + g \circ f_2) \circ a \\
 (g \circ (pf)) \circ a &= g \circ ((pf) \circ a) = g \circ (p \circ (f \circ a)) = p \circ g \circ (f \circ a) \\
 &= p \circ (g \circ f) \circ a = (p(g \circ f)) \circ a
 \end{aligned}$$

□

THEOREM 6.2.4. Let A, B, C be algebras over the commutative ring D . The map

$$(6.2.10) \quad \circ : (g, f) \in \mathcal{L}(D; B \rightarrow C) \times \mathcal{L}(D; A \rightarrow B) \rightarrow g \circ f \in \mathcal{L}(D; A \rightarrow C)$$

is bilinear map.

PROOF. The theorem follows from theorems ^{6.2.2, 6.2.3.}

□

^{6.1}We use following definitions of operations over maps

$$(6.2.4) \quad (f + g) \circ a = f \circ a + g \circ a$$

$$(6.2.5) \quad (pf) \circ a = p \circ f \circ a$$

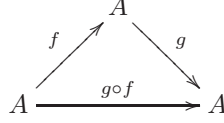
^{6.2}We use following definitions of operations over maps

$$(6.2.8) \quad (f + g) \circ a = f \circ a + g \circ a$$

$$(6.2.9) \quad (pf) \circ a = p \circ f \circ a$$

THEOREM 6.2.5. Let A be algebra over commutative ring D . D -module $\mathcal{L}(D; A \rightarrow A)$ equipped by product

$$(6.2.11) \quad \circ : (g, f) \in \mathcal{L}(D; A \rightarrow A) \times \mathcal{L}(D; A \rightarrow A) \rightarrow g \circ f \in \mathcal{L}(D; A \rightarrow A)$$



is algebra over D .

PROOF. The theorem follows from definition 5.1.1 and theorem 6.2.4. \square

6.3. Linear Map into Associative Algebra

THEOREM 6.3.1. Consider D -algebras A_1 and A_2 . For given map $f \in \mathcal{L}(D; A_1 \rightarrow A_2)$, the map

$$g : A_2 \times A_2 \rightarrow \mathcal{L}(D; A_1 \rightarrow A_2)$$

$$g(a, b) \circ f = afb$$

is bilinear map.

PROOF. The statement of theorem follows from chains of equations

$$\begin{aligned} ((a_1 + a_2)fb) \circ x &= (a_1 + a_2) f \circ x b = a_1 f \circ x b + a_2 f \circ x b \\ &= (a_1 fb) \circ x + (a_2 fb) \circ x = (a_1 fb + a_2 fb) \circ x \\ ((pa)fb) \circ x &= (pa) f \circ x b = p(a f \circ x b) = p((afb) \circ x) = (p(afb)) \circ x \\ (af(b_1 + b_2)) \circ x &= a f \circ x (b_1 + b_2) = a f \circ x b_1 + a f \circ x b_2 \\ &= (afb_1) \circ x + (afb_2) \circ x = (afb_1 + afb_2) \circ x \\ (af(pb)) \circ x &= a f \circ x (pb) = p(a f \circ x b) = p((afb) \circ x) = (p(afb)) \circ x \end{aligned}$$

\square

THEOREM 6.3.2. Consider D -algebras A_1 and A_2 . For given map $f \in \mathcal{L}(D; A_1 \rightarrow A_2)$, there exists linear map

$$h : A_2 \otimes A_2 \rightarrow \mathcal{L}(D; A_1 \rightarrow A_2)$$

defined by the equation

$$(6.3.1) \quad (a \otimes b) \circ f = afb$$

PROOF. The statement of the theorem is corollary of theorems 4.5.4, 6.3.1. \square

THEOREM 6.3.3. Consider D -algebras A_1 and A_2 . Let us define product in algebra $A_2 \otimes A_2$ according to rule

$$(6.3.2) \quad (c \otimes d) \circ (a \otimes b) = (ca) \otimes (bd)$$

A linear map

$$(6.3.3) \quad h : A_2 \otimes A_2 \rightarrow {}^* \mathcal{L}(D; A_1 \rightarrow A_2)$$

defined by the equation

$$(6.3.4) \quad (a \otimes b) \circ f = afb \quad a, b \in A_2 \quad f \in \mathcal{L}(D; A_1 \rightarrow A_2)$$

is representation ^{6.3} of algebra $A_2 \otimes A_2$ in module $\mathcal{L}(D; A_1 \rightarrow A_2)$.

PROOF. According to theorem 6.1.8, map (6.3.4) is transformation of module $\mathcal{L}(D; A_1 \rightarrow A_2)$. For a given tensor $c \in A_2 \otimes A_2$, a transformation $h(c)$ is a linear transformation of module $\mathcal{L}(D; A_1 \rightarrow A_2)$, because

$$\begin{aligned}
 ((a \otimes b) \circ (f_1 + f_2)) \circ x &= (a(f_1 + f_2)b) \circ x = a((f_1 + f_2) \circ x)b \\
 &= a(f_1 \circ x + f_2 \circ x)b = a(f_1 \circ x)b + a(f_2 \circ x)b \\
 &= (af_1b) \circ x + (af_2b) \circ x \\
 &= (a \otimes b) \circ f_1 \circ x + (a \otimes b) \circ f_2 \circ x \\
 &= ((a \otimes b) \circ f_1 + (a \otimes b) \circ f_2) \circ x \\
 ((a \otimes b) \circ (pf)) \circ x &= (a(pf)b) \circ x = a((pf) \circ x)b \\
 &= a(p \circ f \circ x)b = pa(f \circ x)b \\
 &= p(afb) \circ x = p((a \otimes b) \circ f) \circ x \\
 &= (p((a \otimes b) \circ f)) \circ x
 \end{aligned}$$

According to theorem 6.3.2, map (6.3.4) is linear map.

Let $f \in \mathcal{L}(D; A_1 \rightarrow A_2)$, $a \otimes b, c \otimes d \in A_2 \otimes A_2$. According to the theorem 6.3.2

$$(a \otimes b) \circ f = afb \in \mathcal{L}(D; A_1 \rightarrow A_2)$$

Therefore, according to the theorem 6.3.2

$$(c \otimes d) \circ ((a \otimes b) \circ f) = c(afb)d$$

Since the product in algebra A_2 is associative, then

$$(c \otimes d) \circ ((a \otimes b) \circ f) = c(afb)d = (ca)f(bd) = (ca \otimes bd) \circ f$$

Therefore, since we define the product in algebra $A_2 \otimes A_2$ according to equation (6.3.2), then the map (6.3.3) is morphism of algebras. According to the definition [4]-2.1.2, map (6.3.4) is a representation of the algebra $A_2 \otimes A_2$ in the module $\mathcal{L}(D; A_1 \rightarrow A_2)$. \square

THEOREM 6.3.4. Consider D -algebra A . Let us define product in algebra $A \otimes A$ according to rule (6.3.2). A representation of algebra $A \otimes A$

$$(6.3.5) \quad h : A \otimes A \rightarrow {}^*\mathcal{L}(D; A \rightarrow A)$$

in module $\mathcal{L}(D; A \rightarrow A)$ defined by the equation

$$(6.3.6) \quad (a \otimes b) \circ f = afb \quad a, b \in A \quad f \in \mathcal{L}(D; A \rightarrow A)$$

allows us to identify tensor $d \in A \otimes A$ and map $d \circ \delta \in \mathcal{L}(D; A \rightarrow A)$ where $\delta \in \mathcal{L}(D; A \rightarrow A)$ is identity map.

PROOF. According to the theorem 6.3.2, the map $f \in \mathcal{L}(D; A \rightarrow A)$ and the tensor $d \in A \otimes A$ generate the map

$$(6.3.7) \quad x \rightarrow (d \circ f) \circ x$$

If we assume $f = \delta$, $d = a \otimes b$, then the equation (6.3.7) gets form

$$(6.3.8) \quad ((a \otimes b) \circ \delta) \circ x = (adb) \circ x = a(\delta \circ x)b = axb$$

^{6.3}See the definition of representation of Ω -algebra in the definition [4]-2.1.2.

If we assume

$$(6.3.9) \quad ((a \otimes b) \circ \delta) \circ x = (a \otimes b) \circ (\delta \circ x) = (a \otimes b) \circ x$$

then comparison of equations (6.3.8) and (6.3.9) gives a basis to identify the action of the tensor $a \otimes b$ and transformation $(a \otimes b) \circ \delta$. \square

From the theorem 6.3.4, it follows that we can consider the map (6.3.4) as the product of maps $a \otimes b$ and f . The tensor $a \in A_2 \otimes A_2$ is **nonsingular**, if there exists the tensor $b \in A_2 \otimes A_2$ such that $a \circ b = 1 \otimes 1$.

DEFINITION 6.3.5. Consider^{6.4} the representation of algebra $A_2 \otimes A_2$ in the module $\mathcal{L}(D; A_1 \rightarrow A_2)$. The set

$$(A_2 \otimes A_2) \circ f = \{g = d \circ f : d \in A_2 \otimes A_2\}$$

is called **orbit of linear map** $f \in \mathcal{L}(D; A_1 \rightarrow A_2)$. \square

THEOREM 6.3.6. Consider D -algebra A_1 and associative D -algebra A_2 . Consider the representation of algebra $A_2 \otimes A_2$ in the module $\mathcal{L}(D; A_1; A_2)$. The map

$$h : A_1 \rightarrow A_2$$

generated by the map

$$f : A_1 \rightarrow A_2$$

has form

$$(6.3.10) \quad h = (a_{s,0} \otimes a_{s,1}) \circ f = a_{s,0} f a_{s,1}$$

PROOF. We can represent any tensor $a \in A_2 \otimes A_2$ in the form

$$a = a_{s,0} \otimes a_{s,1}$$

According to the theorem 6.3.3, the map (6.3.4) is linear. This proves the statement of the theorem. \square

THEOREM 6.3.7. Let A_2 be algebra with unit e . Let $a \in A_2 \otimes A_2$ be a nonsingular tensor. Orbits of linear maps $f \in \mathcal{L}(D; A_1 \rightarrow A_2)$ and $g = a \circ f$ coincide

$$(6.3.11) \quad (A_2 \otimes A_2) \circ f = (A_2 \otimes A_2) \circ g$$

PROOF. If $h \in (A_2 \otimes A_2) \circ g$, then there exists $b \in A_2 \otimes A_2$ such that $h = b \circ g$. In that case

$$(6.3.12) \quad h = b \circ (a \circ f) = (b \circ a) \circ f$$

Therefore, $h \in (A_2 \otimes A_2) \circ f$,

$$(6.3.13) \quad (A_2 \otimes A_2) \circ g \subset (A_2 \otimes A_2) \circ f$$

Since a is nonsingular tensor, then

$$(6.3.14) \quad f = a^{-1} \circ g$$

If $h \in (A_2 \otimes A_2) \circ f$, then there exists $b \in A_2 \otimes A_2$ such that

$$(6.3.15) \quad h = b \circ f$$

From equations (6.3.14), (6.3.15), it follows that

$$h = b \circ (a^{-1} \circ g) = (b \circ a^{-1}) \circ g$$

^{6.4}The definition is made by analogy with the definition [4]-3.1.8.

Therefore, $h \in (A_2 \otimes A_2) \circ g$,

$$(6.3.16) \quad (A_2 \otimes A_2) \circ f \subset (A_2 \otimes A_2) \circ g$$

(6.3.11) follows from equations (6.3.13), (6.3.16). \square

From the theorem 6.3.7, it also follows that if $g = a \circ f$ and $a \in A_2 \otimes A_2$ is a singular tensor, then relationship (6.3.13) is true. However, the main result of the theorem 6.3.7 is that the representations of the algebra $A_2 \otimes A_2$ in module $\mathcal{L}(D; A_1 \rightarrow A_2)$ generates an equivalence in the module $\mathcal{L}(D; A_1 \rightarrow A_2)$. If we successfully choose the representatives of each equivalence class, then the resulting set will be generating set of considered representation.^{6.5}

6.4. Linear Map into Free Finite Dimensional Associative Algebra

THEOREM 6.4.1. *Let A_1 be free D -module. Let A_2 be free finite dimensional associative D -algebra. Let \bar{e} be basis of D module A_2 . Let \bar{I} be the basis of left $A_2 \otimes A_2$ -module $\mathcal{L}(D; A_1 \rightarrow A_2)$.*^{6.6}

6.4.1.1: *The map*

$$f : A_1 \rightarrow A_2$$

has the following expansion

$$(6.4.1) \quad f = f^k \circ I_k$$

where

$$f^k = f_{s_k \cdot 0}^k \otimes f_{s_k \cdot 1}^k \quad f^k \in A_2 \otimes A_2$$

6.4.1.2: *The map f has the standard representation*

$$(6.4.2) \quad f = f^{k \cdot ij} (e_i \otimes e_j) \circ I_k = f^{k \cdot ij} e_i I_k e_j$$

PROOF. Since \bar{I} is the basis of left $A_2 \otimes A_2$ -module $\mathcal{L}(D; A_1 \rightarrow A_2)$, then according to the definition [4]-2.7.1 and the theorem 4.1.4, there exists expansion

$$(6.4.3) \quad f = f^k \circ I_k \quad f^k \in A_2 \otimes A_2$$

of the linear map f with respect to the basis \bar{I} . According to the definition (3.3.20),

$$(6.4.4) \quad f^k = f_{s_k \cdot 0}^k \otimes f_{s_k \cdot 1}^k$$

The equality (6.4.1) follows from equalities (6.4.3), (6.4.4). According to theorem 4.5.6, the standard representation of the tensor f^k has form

$$(6.4.5) \quad f^k = f^{k \cdot ij} e_i \otimes e_j$$

The equation (6.4.2) follows from equations (6.4.1), (6.4.5). \square

^{6.5}Generating set of representation is defined in definition [4]-2.6.5.

^{6.6} If D -module A_1 or D -module A_2 is not free D -module, then we may consider the set

$$\bar{I} = \{I_k \in \mathcal{L}(D; A_1 \rightarrow A_2) : k = 1, \dots, n\}$$

of linear independent linear maps. The theorem is true for any linear map

$$f : A_1 \rightarrow A_2$$

generated by the set of linear maps \bar{I} .

THEOREM 6.4.2. Let A_1 be free D -module. Let A_2 be free associative D -algebra. Let $\overline{\overline{I}}$ be the basis of left $A_2 \otimes A_2$ -module $\mathcal{L}(D; A_1 \rightarrow A_2)$. For any map $I_k \in \overline{\overline{I}}$, there exists set of linear maps

$$I_k^l : A_1 \otimes A_1 \rightarrow A_2 \otimes A_2$$

of D -module $A_1 \otimes A_1$ into D -module $A_2 \otimes A_2$ such that

$$(6.4.6) \quad I_k \circ a \circ x = (I_k^l \circ a) \circ I_l \circ x$$

The map I_k^l is called **conjugation transformation**.

PROOF. According to the theorem 6.2.1, for any tensor $a \in A_1 \otimes A_1$, the map

$$(6.4.7) \quad x \rightarrow I_k \circ a \circ x$$

is linear. According to the statement 6.4.1.1, there exists expansion

$$(6.4.8) \quad I_k \circ a \circ x = b^l \circ I_l \circ x \quad b^l \in A_2 \times A_2$$

Let

$$(6.4.9) \quad b^l = I_k^l \circ a$$

The equality (6.4.6) follows from equalities (6.4.8), (6.4.9). From equalities

$$\begin{aligned} (I_k^l \circ (a_1 + a_2)) \circ I_l \circ x &= I_k \circ (a_1 + a_2) \circ x \\ &= I_k \circ a_1 \circ x + I_k \circ a_2 \circ x \\ &= (I_k^l \circ a_1) \circ I_l \circ x + (I_k^l \circ a_2) \circ I_l \circ x \\ (I_k^l \circ (da)) \circ I_l \circ x &= I_k \circ (da) \circ x = I_k \circ (d(a \circ x)) \\ &= d(I_k \circ a \circ x) = d((I_k^l \circ a) \circ I_l \circ x) \\ &= (d(I_k^l \circ a)) \circ I_l \circ x \end{aligned}$$

it follows that the map I_k^l is linear map. \square

THEOREM 6.4.3. Let A_1 be free D -module. Let A_2, A_3 be free associative D -algebras. Let $\overline{\overline{I}}$ be the basis of left $A_2 \otimes A_2$ -module $\mathcal{L}(D; A_1 \rightarrow A_2)$. Let $\overline{\overline{J}}$ be the basis of left $A_3 \otimes A_3$ -module $\mathcal{L}(D; A_2 \rightarrow A_3)$.

6.4.3.1: The set of maps

$$(6.4.10) \quad \overline{\overline{K}} = \{K_{lk} : K_{lk} = J_l \circ I_k, J_l \in \overline{\overline{J}}, I_k \in \overline{\overline{I}}\}$$

is the basis of left $A_3 \otimes A_3$ -module $\mathcal{L}(D; A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_3)$.

6.4.3.2: Let

$$(6.4.11) \quad f = f^k \circ I_k$$

be expansion of linear map

$$f : A_1 \rightarrow A_2$$

with respect to the basis $\overline{\overline{I}}$. Let

$$(6.4.12) \quad g = g^l \circ J_l$$

be expansion of linear map

$$g : A_2 \rightarrow A_3$$

with respect to the basis $\overline{\overline{J}}$. Then linear map

$$(6.4.13) \quad h = g \circ f$$

has expansion

$$(6.4.14) \quad h = h^{lk} \circ K_{lk}$$

with respect to the basis $\overline{\overline{K}}$ where

$$(6.4.15) \quad h^{lk} = g^l \circ (J_m^k \circ f^m)$$

PROOF. The equality

$$(6.4.16) \quad h \circ a = g \circ f \circ a = g^l \circ J_l \circ f^k \circ I_k \circ a$$

follows from equalities (6.4.11), (6.4.12), (6.4.13). The equality

$$(6.4.17) \quad \begin{aligned} h \circ a &= g \circ f \circ a = g^l \circ (J_l^m \circ f^k) \circ J_m \circ I_k \circ a \\ &= g^l \circ (J_l^m \circ f^k) \circ K_{mk} \circ a \end{aligned}$$

follows from equalities (6.4.10), (6.4.16) and from the theorem 6.4.2. From the equality (6.4.17) it follows that set of maps $\overline{\overline{K}}$ generates left $A_3 \otimes A_3$ -module $\mathcal{L}(D; A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_3)$. From the equality

$$a^{lk} K_{lk} = (a^{lk} \circ J_l) \circ I_k = 0$$

it follows that

$$a^{lk} \circ J_l = 0$$

and, therefore, $a^{lk} = 0$. Therefore, the set $\overline{\overline{K}}$ is the basis of left $A_3 \otimes A_3$ -module $\mathcal{L}(D; A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_3)$. \square

THEOREM 6.4.4. Let A be free associative D -algebra. Let left $A \otimes A$ -module $\mathcal{L}(D; A \rightarrow A)$ is generated by the identity map $I_0 = \delta$. Let

$$(6.4.18) \quad f = f_{s \cdot 0} \otimes f_{s \cdot 1}$$

be expansion of linear map

$$f : A \rightarrow A$$

Let

$$(6.4.19) \quad g = g_{t \cdot 0} \otimes g_{t \cdot 1}$$

be expansion of linear map

$$g : A \rightarrow A$$

Then linear map

$$(6.4.20) \quad h = g \circ f$$

has expansion

$$(6.4.21) \quad h = h_{ts \cdot 0} \otimes h_{ts \cdot 1}$$

where

$$(6.4.22) \quad \begin{aligned} h_{ts \cdot 0} &= g_{t \cdot 0} f_{s \cdot 0} \\ h_{ts \cdot 1} &= f_{s \cdot 1} g_{t \cdot 1} \end{aligned}$$

PROOF. The equality

$$\begin{aligned}
 h \circ a &= g \circ f \circ a \\
 &= (g_{t \cdot 0} \otimes g_{t \cdot 1}) \circ (f_{s \cdot 0} \otimes f_{s \cdot 1}) \circ a \\
 (6.4.23) \quad &= (g_{t \cdot 0} \otimes g_{t \cdot 1}) \circ (f_{s \cdot 0} a f_{s \cdot 1}) \\
 &= g_{t \cdot 0} f_{s \cdot 0} a f_{s \cdot 1} g_{t \cdot 1}
 \end{aligned}$$

follows from equalities (6.4.18), (6.4.19), (6.4.20). The equality (6.4.22) follows from the equality (6.4.23). \square

THEOREM 6.4.5. Let \bar{e}_1 be basis of the free finite dimensional D -module A_1 . Let \bar{e}_2 be basis of the free finite dimensional associative D -algebra A_2 . Let C_{kl}^p be structural constants of algebra A_2 . Let \bar{I} be the basis of left $A_2 \otimes A_2$ -module $\mathcal{L}(D; A_1 \rightarrow A_2)$ and $I_{k \cdot i}^j$ be coordinates of map I_k with respect to bases \bar{e}_1 and \bar{e}_2 . Coordinates f_l^k of the map $f \in \mathcal{L}(D; A_1 \rightarrow A_2)$ and its standard components $f^{k \cdot ij}$ are connected by the equation

$$(6.4.24) \quad f_l^k = f^{k \cdot ij} I_{k \cdot l}^m C_{im}^p C_{pj}^k$$

PROOF. Relative to bases \bar{e}_1 and \bar{e}_2 , linear maps f and I_k have form

$$(6.4.25) \quad f \circ x = f_j^i x^j e_{2 \cdot i}$$

$$(6.4.26) \quad I_k \circ x = I_{k \cdot j}^i x^j e_{2 \cdot i}$$

The equality

$$\begin{aligned}
 (6.4.27) \quad f_l^k x^l e_{2 \cdot k} &= f^{k \cdot ij} e_{2 \cdot i} I_{k \cdot l}^m x^l e_{2 \cdot m} \bar{e}_{2 \cdot j} \\
 &= f^{k \cdot ij} I_{k \cdot l}^m x^l C_{im}^p C_{pj}^k e_{2 \cdot k}
 \end{aligned}$$

follows from equalities (6.4.2), (6.4.25), (6.4.26). Since vectors $\bar{e}_{2 \cdot k}$ are linear independent and x^i are arbitrary, then the equation (6.4.24) follows from the equation (6.4.27). \square

THEOREM 6.4.6. Let D be field. Let \bar{e}_1 be basis of the free finite dimensional D -algebra A_1 . Let \bar{e}_2 be basis of the free finite dimensional associative D -algebra A_2 . Let C_{kl}^p be structural constants of algebra A_2 . Consider matrix

$$(6.4.28) \quad \mathcal{B} = (C_{m \cdot ij}^k) = (C_{2 \cdot im}^p C_{2 \cdot pj}^k)$$

whose rows and columns are indexed by $\cdot k_m$ and $\cdot ij$, respectively. If matrix \mathcal{B} is nonsingular, then, for given coordinates of linear transformation g_k^l and for map $f = \delta$, the system of linear equations (6.4.24) with standard components of this transformation g^{kr} has the unique solution.

If matrix \mathcal{B} is singular, then the equation

$$(6.4.29) \quad \text{rank} \begin{pmatrix} C_{m \cdot ij}^k & g_m^k \end{pmatrix} = \text{rank } C$$

is the condition for the existence of solutions of the system of linear equations (6.4.24). In such case the system of linear equations (6.4.24) has infinitely many solutions and there exists linear dependence between values g_m^k .

PROOF. The statement of the theorem is corollary of the theory of linear equations over field. \square

THEOREM 6.4.7. *Let A be free finite dimensional associative algebra over the field D . Let \bar{e} be the basis of the algebra A over the field D . Let C_{kl}^p be structural constants of algebra A . Let matrix (6.4.28) be singular. Let the linear map $f \in \mathcal{L}(D; A \rightarrow A)$ be nonsingular. If coordinates of linear transformations f and g satisfy to the equation*

$$(6.4.30) \quad \text{rank} \begin{pmatrix} C_{m \cdot ij}^k & g_m^k & f_m^k \end{pmatrix} = \text{rank } C$$

then the system of linear equations

$$(6.4.31) \quad g_l^k = f_l^m g^{ij} C_{im}^p C_{pj}^k$$

has infinitely many solutions.

PROOF. According to the equation (6.4.30) and the theorem 6.4.6, the system of linear equations

$$(6.4.32) \quad f_l^k = f^{ij} C_{il}^p C_{pj}^k$$

has infinitely many solutions corresponding to linear map

$$(6.4.33) \quad f = f^{ij} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j$$

According to the equation (6.4.30) and the theorem 6.4.6, the system of linear equations

$$(6.4.34) \quad g_l^k = g^{ij} C_{il}^p C_{pj}^k$$

has infinitely many solutions corresponding to linear map

$$(6.4.35) \quad g = g^{ij} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j$$

Maps f and g are generated by the map δ . According to the theorem 6.3.7, the map f generates the map g . This proves the statement of the theorem. \square

THEOREM 6.4.8. *Let A be free finite dimensional associative algebra over the field D . The representation of algebra $A \otimes A$ in algebra $\mathcal{L}(D; A \rightarrow A)$ has finite basis \bar{I} .*

6.4.8.1: *The linear map $f \in \mathcal{L}(D; A \rightarrow A)$ has form*

$$(6.4.36) \quad f = (a_{k \cdot s_k \cdot 0} \otimes a_{k \cdot s_k \cdot 1}) \circ I_k = \sum_k a_{k \cdot s_k \cdot 0} I_k a_{k \cdot s_k \cdot 1}$$

6.4.8.2: *Its standard representation has form*

$$(6.4.37) \quad f = a^{k \cdot ij} (e_i \otimes e_j) \circ I_k = a^{k \cdot ij} e_i I_k e_j$$

PROOF. From the theorem 6.4.7, it follows that if matrix \mathcal{B} is singular and the map f satisfies to the equation

$$(6.4.38) \quad \text{rank} \begin{pmatrix} C_{m \cdot ij}^k & f_m^k \end{pmatrix} = \text{rank } C$$

then the map f generates the same set of maps that is generated by the map δ . Therefore, to build the basis of representation of the algebra $A \otimes A$ in the module $\mathcal{L}(D; A \rightarrow A)$, we must perform the following construction.

The set of solutions of system of equations (6.4.31) generates a free submodule \mathcal{L} of the module $\mathcal{L}(D; A \rightarrow A)$. We build the basis $(\bar{h}_1, \dots, \bar{h}_k)$ of the submodule \mathcal{L} . Then we supplement this basis by linearly independent vectors $\bar{h}_{k+1}, \dots, \bar{h}_m$,

that do not belong to the submodule \mathcal{L} so that the set of vectors $\bar{h}_1, \dots, \bar{h}_m$ forms a basis of the module $\mathcal{L}(D; A_1 \rightarrow A_2)$. The set of orbits $(A \otimes A) \circ \delta, (A \otimes A) \circ \bar{h}_{k+1}, \dots, (A \otimes A) \circ \bar{h}_m$ generates the module $\mathcal{L}(D; A \rightarrow A)$. Since the set of orbits is finite, we can choose the orbits so that they do not intersect. For each orbit we can choose a representative which generates the orbit. \square

EXAMPLE 6.4.9. For complex field, the algebra $\mathcal{L}(R; C \rightarrow C)$ has basis

$$I_0 \circ z = z$$

$$I_1 \circ z = \bar{z}$$

For quaternion algebra, the algebra $\mathcal{L}(R; H \rightarrow H)$ has basis

$$I_0 \circ z = z$$

\square

6.5. Linear Map into Nonassociative Algebra

Since the product is nonassociative, we may assume that action of $a, b \in A$ over the map f may have form either $a(fb)$, or $(af)b$. However this assumption leads us to a rather complex structure of the linear map. To better understand how complex the structure of the linear map, we begin by considering the left and right shifts in nonassociative algebra.

THEOREM 6.5.1. Let

$$(6.5.1) \quad l(a) \circ x = ax$$

be map of left shift. Then

$$(6.5.2) \quad l(a) \circ l(b) = l(ab) - (a, b)_1$$

where we introduced linear map

$$(a, b)_1 \circ x = (a, b, x)$$

PROOF. From the equations (5.1.2), (6.5.1), it follows that

$$\begin{aligned} (6.5.3) \quad & (l(a) \circ l(b)) \circ x = l(a) \circ (l(b) \circ x) \\ & = a(bx) = (ab)x - (a, b, x) \\ & = l(ab) \circ x - (a, b)_1 \circ x \end{aligned}$$

The equation (6.5.2) follows from equation (6.5.3). \square

THEOREM 6.5.2. Let

$$(6.5.4) \quad r(a) \circ x = xa$$

be map of right shift. Then

$$(6.5.5) \quad r(a) \circ r(b) = r(ba) + (b, a)_2$$

where we introduced linear map

$$(b, a)_2 \circ x = (x, b, a)$$

PROOF. From the equations (5.1.2), (6.5.4) it follows that

$$\begin{aligned}
 (6.5.6) \quad & (r(a) \circ r(b)) \circ x = r(a) \circ (r(b) \circ x) \\
 & = (xb)a = x(ba) + (x, b, a) \\
 & = r(ba) \circ x + (x, b, a)
 \end{aligned}$$

The equation (6.5.5) follows from equation (6.5.6). \square

Let

$$f : A \rightarrow A \quad f = (ax)b$$

be linear map of the algebra A . According to the theorem 6.1.8, the map

$$g : A \rightarrow A \quad g = (cf)d$$

is also a linear map. However, it is not obvious whether we can write the map g as a sum of terms of type $(ax)b$ and $a(xb)$.

If A is free finite dimensional algebra, then we can assume that the linear map has the standard representation like 6.7

$$(6.5.8) \quad f \circ x = f^{ij} (\bar{e}_i x) \bar{e}_j$$

In this case we can use the theorem 6.4.8 for maps into nonassociative algebra.

THEOREM 6.5.3. *Let \bar{e}_1 be basis of the free finite dimensional D -algebra A_1 . Let \bar{e}_2 be basis of the free finite dimensional nonassociative D -algebra A_2 . Let $C_{2 \cdot kl}^p$ be structural constants of algebra A_2 . Let the map*

$$(6.5.9) \quad g = a \circ f$$

generated by the map $f \in \mathcal{L}(D; A_1 \rightarrow A_2)$ through the tensor $a \in A_2 \otimes A_2$, has the standard representation

$$(6.5.10) \quad g = a^{ij} (\bar{e}_i \otimes \bar{e}_j) \circ f = a^{ij} (\bar{e}_i f) \bar{e}_j$$

Coordinates of the map (6.5.9) and its standard components are connected by the equation

$$(6.5.11) \quad g_l^k = f_l^m g^{ij} C_{2 \cdot im}^p C_{2 \cdot pj}^k$$

PROOF. Relative to bases \bar{e}_1 and \bar{e}_2 , linear maps f and g have form

$$(6.5.12) \quad f \circ x = f_j^i x^j \bar{e}_{2 \cdot i}$$

$$(6.5.13) \quad g \circ x = g_j^i x^j \bar{e}_{2 \cdot i}$$

From equations (6.5.12), (6.5.13), (6.5.10) it follows that

$$\begin{aligned}
 (6.5.14) \quad & g_l^k x^l \bar{e}_{2 \cdot k} = a^{ij} (\bar{e}_{2 \cdot i} (f_l^m x^l \bar{e}_{2 \cdot m})) \bar{e}_{2 \cdot j} \\
 & = a^{ij} f_l^m x^l C_{2 \cdot im}^p C_{2 \cdot pj}^k \bar{e}_{2 \cdot k}
 \end{aligned}$$

^{6.7}The choice is arbitrary. We may consider the standard representation like

$$f \circ x = f^{ij} \bar{e}_i (x \bar{e}_j)$$

Then the equation (6.5.11) has form

$$(6.5.7) \quad g_l^k = f_l^m g^{ij} C_{2 \cdot ip}^p C_{2 \cdot mj}^k$$

I chose the expression (6.5.8) because order of the factors corresponds to the order chosen in the theorem 6.4.8.

Since vectors $\bar{e}_{2,\mathbf{k}}$ are linear independent and $x^{\mathbf{i}}$ are arbitrary, then the equation (6.5.11) follows from the equation (6.5.14). \square

THEOREM 6.5.4. *Let A be free finite dimensional nonassociative algebra over the ring D . The representation of algebra $A \otimes A$ in algebra $\mathcal{L}(D; A \rightarrow A)$ has finite basis $\bar{\bar{I}}$.*

(1) *The linear map $f \in \mathcal{L}(D; A \rightarrow A)$ has form*

$$(6.5.15) \quad f = (a_{k \cdot s_k \cdot 0} \otimes a_{k \cdot s_k \cdot 1}) \circ I_k = (a_{k \cdot s_k \cdot 0} I_k) a_{k \cdot s_k \cdot 1}$$

(2) *Its standard representation has form*

$$(6.5.16) \quad f = a^{k \cdot \mathbf{i} \mathbf{j}} (\bar{e}_{\mathbf{i}} \otimes \bar{e}_{\mathbf{j}}) \circ I_k = a^{k \cdot \mathbf{i} \mathbf{j}} (\bar{e}_{\mathbf{i}} I_k) \bar{e}_{\mathbf{j}}$$

PROOF. Consider matrix (6.4.28). If matrix \mathcal{B} is nonsingular, then, for given coordinates of linear transformation $g_{\mathbf{k}}^{\mathbf{l}}$ and for map $f = \delta$, the system of linear equations (6.5.11) with standard components of this transformation $g^{\mathbf{k} \mathbf{r}}$ has the unique solution. If matrix \mathcal{B} is singular, then according to the theorem 6.4.8 there exists finite basis $\bar{\bar{I}}$ generating the set of linear maps. \square

Unlike the case of an associative algebra, the set of generators I in the theorem 6.5.4 is not minimal. From the equation (6.5.2) it follows that the equation (6.3.12) does not hold. Therefore, orbits of maps I_k do not generate an equivalence relation in the algebra $L(A; A)$. Since we consider only maps like $(a I_k) b$, then it is possible that for $k \neq l$ the map I_k generates the map I_l , if we consider all possible operations in the algebra A . Therefore, the set of generators I_k of nonassociative algebra A does not play such a critical role as conjugation in complex field. The answer to the question of how important it is the map I_k in nonassociative algebra requires additional research.

6.6. Polylinear Map into Associative Algebra

THEOREM 6.6.1. *Let A_1, \dots, A_n, A be associative D -algebras. Let*

$$f_i \in \mathcal{L}(D; A_i \rightarrow A) \quad i = 1, \dots, n$$

$$a_j \in A \quad j = 0, \dots, n$$

For given transposition σ of n variables, the map

$$(6.6.1) \quad \begin{aligned} & ((a_0, \dots, a_n, \sigma) \circ (f_1, \dots, f_n)) \circ (x_1, \dots, x_n) \\ &= (a_0 \sigma(f_1) a_1 \dots a_{n-1} \sigma(f_n) a_n) \circ (x_1, \dots, x_n) \\ &= a_0 \sigma(f_1 \circ x_1) a_1 \dots a_{n-1} \sigma(f_n \circ x_n) a_n \end{aligned}$$

is n -linear map into algebra A .

PROOF. The statement of theorem follows from chains of equations

$$\begin{aligned}
& ((a_0, \dots, a_n, \sigma) \circ (f_1, \dots, f_n)) \circ (x_1, \dots, x_i + y_i, \dots, x_n) \\
&= a_0 \sigma(f_1 \circ x_1) a_1 \dots \sigma(f_i \circ (x_i + y_i)) \dots a_{n-1} \sigma(f_n \circ x_n) a_n \\
&= a_0 \sigma(f_1 \circ x_1) a_1 \dots \sigma(f_i \circ x_i + f_i \circ y_i) \dots a_{n-1} \sigma(f_n \circ x_n) a_n \\
&= a_0 \sigma(f_1 \circ x_1) a_1 \dots \sigma(f_i \circ x_i) \dots a_{n-1} \sigma(f_n \circ x_n) a_n \\
&+ a_0 \sigma(f_1 \circ x_1) a_1 \dots \sigma(f_i \circ y_i) \dots a_{n-1} \sigma(f_n \circ x_n) a_n \\
&= ((a_0, \dots, a_n, \sigma) \circ (f_1, \dots, f_n)) \circ (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \\
&+ ((a_0, \dots, a_n, \sigma) \circ (f_1, \dots, f_n)) \circ (x_1, \dots, y_i, \dots, x_n) \\
& \\
& ((a_0, \dots, a_n, \sigma) \circ (f_1, \dots, f_n)) \circ (x_1, \dots, px_i, \dots, x_n) \\
&= a_0 \sigma(f_1 \circ x_1) a_1 \dots \sigma(f_i \circ (px_i)) \dots a_{n-1} \sigma(f_n \circ x_n) a_n \\
&= a_0 \sigma(f_1 \circ x_1) a_1 \dots \sigma(p(f_i \circ x_i)) \dots a_{n-1} \sigma(f_n \circ x_n) a_n \\
&= p(a_0 \sigma(f_1 \circ x_1) a_1 \dots \sigma(f_i \circ x_i) \dots a_{n-1} \sigma(f_n \circ x_n) a_n) \\
&= p(((a_0, \dots, a_n, \sigma) \circ (f_1, \dots, f_n)) \circ (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n))
\end{aligned}$$

□

In the equation (6.6.1), as well as in other expressions of polylinear map, we have convention that map f_i has variable x_i as argument.

THEOREM 6.6.2. Let A_1, \dots, A_n, A be associative D -algebras. For given set of maps

$$f_i \in \mathcal{L}(D; A_i \rightarrow A) \quad i = 1, \dots, n$$

the map

$$h : A^{n+1} \rightarrow \mathcal{L}(D; A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow A)$$

defined by equation

$$(a_0, \dots, a_n, \sigma) \circ (f_1, \dots, f_n) = a_0 \sigma(f_1) a_1 \dots a_{n-1} \sigma(f_n) a_n$$

is $n + 1$ -linear map into D -module $\mathcal{L}(D; A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow A)$.

PROOF. The statement of theorem follows from chains of equations

$$\begin{aligned}
& ((a_0, \dots, a_i + b_i, \dots, a_n, \sigma) \circ (f_1, \dots, f_n)) \circ (x_1, \dots, x_n) \\
&= a_0 \sigma(f_1 \circ x_1) a_1 \dots (a_i + b_i) \dots a_{n-1} \sigma(f_n \circ x_n) a_n \\
&= a_0 \sigma(f_1 \circ x_1) a_1 \dots a_i \dots a_{n-1} \sigma(f_n \circ x_n) a_n + a_0 \sigma(f_1 \circ x_1) a_1 \dots b_i \dots a_{n-1} \sigma(f_n \circ x_n) a_n \\
&= ((a_0, \dots, a_i, \dots, a_n, \sigma) \circ (f_1, \dots, f_n)) \circ (x_1, \dots, x_n) \\
&+ ((a_0, \dots, b_i, \dots, a_n, \sigma) \circ (f_1, \dots, f_n)) \circ (x_1, \dots, x_n) \\
&= ((a_0, \dots, a_i, \dots, a_n, \sigma) \circ (f_1, \dots, f_n) + (a_0, \dots, b_i, \dots, a_n, \sigma) \circ (f_1, \dots, f_n)) \circ (x_1, \dots, x_n) \\
& \\
& ((a_0, \dots, pa_i, \dots, a_n, \sigma) \circ (f_1, \dots, f_n)) \circ (x_1, \dots, x_n) \\
&= a_0 \sigma(f_1 \circ x_1) a_1 \dots pa_i \dots a_{n-1} \sigma(f_n \circ x_n) a_n \\
&= p(a_0 \sigma(f_1 \circ x_1) a_1 \dots a_i \dots a_{n-1} \sigma(f_n \circ x_n) a_n) \\
&= p(((a_0, \dots, a_i, \dots, a_n, \sigma) \circ (f_1, \dots, f_n)) \circ (x_1, \dots, x_n)) \\
&= (p((a_0, \dots, a_i, \dots, a_n, \sigma) \circ (f_1, \dots, f_n))) \circ (x_1, \dots, x_n)
\end{aligned}$$

□

THEOREM 6.6.3. Let A_1, \dots, A_n, A be associative D -algebras. For given set of maps

$$f_i \in \mathcal{L}(D; A_i \rightarrow A) \quad i = 1, \dots, n$$

there exists linear map

$$h : A^{\otimes n+1} \times S_n \rightarrow \mathcal{L}(D; A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow A)$$

defined by the equation

$$(6.6.2) \quad \begin{aligned} (a_0 \otimes \dots \otimes a_n, \sigma) \circ (f_1, \dots, f_n) &= (a_0, \dots, a_n, \sigma) \circ (f_1, \dots, f_n) \\ &= a_0 \sigma(f_1) a_1 \dots a_{n-1} \sigma(f_n) a_n \end{aligned}$$

PROOF. The statement of the theorem is corollary of theorems 4.5.4, 6.6.2. \square

THEOREM 6.6.4. Let A_1, \dots, A_n, A be associative D -algebras. For given tensor $a \in A^{\otimes n+1}$ and given transposition $\sigma \in S_n$ the map

$$h : \prod_{i=1}^n \mathcal{L}(D; A_i \rightarrow A) \rightarrow \mathcal{L}(D; A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow A)$$

defined by equation

$$(a_0 \otimes \dots \otimes a_n, \sigma) \circ (f_1, \dots, f_n) = a_0 \sigma(f_1) a_1 \dots a_{n-1} \sigma(f_n) a_n$$

is n -linear map into D -module $\mathcal{L}(D; A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow A)$.

PROOF. The statement of theorem follows from chains of equations

$$\begin{aligned} &((a_0 \otimes \dots \otimes a_n, \sigma) \circ (f_1, \dots, f_i + g_i, \dots, f_n)) \circ (x_1, \dots, x_n) \\ &= (a_0 \sigma(f_1) a_1 \dots \sigma(f_i + g_i) \dots a_{n-1} \sigma(f_n) a_n) \circ (x_1, \dots, x_n) \\ &= a_0 \sigma(f_1 \circ x_1) a_1 \dots \sigma((f_i + g_i) \circ x_i) \dots a_{n-1} \sigma(f_n \circ x_n) a_n \\ &= a_0 \sigma(f_1 \circ x_1) a_1 \dots \sigma(f_i \circ x_i + g_i \circ x_i) \dots a_{n-1} \sigma(f_n \circ x_n) a_n \\ &= a_0 \sigma(f_1 \circ x_1) a_1 \dots \sigma(f_i \circ x_i) \dots a_{n-1} \sigma(f_n \circ x_n) a_n \\ &\quad + a_0 \sigma(f_1 \circ x_1) a_1 \dots \sigma(g_i \circ x_i) \dots a_{n-1} \sigma(f_n \circ x_n) a_n \\ &= (a_0 \sigma(f_1) a_1 \dots \sigma(f_i) \dots a_{n-1} \sigma(f_n) a_n) \circ (x_1, \dots, x_n) \\ &\quad + (a_0 \sigma(f_1) a_1 \dots \sigma(g_i) \dots a_{n-1} \sigma(f_n) a_n) \circ (x_1, \dots, x_n) \\ &= ((a_0 \otimes \dots \otimes a_n, \sigma) \circ (f_1, \dots, f_i, \dots, f_n)) \circ (x_1, \dots, x_n) \\ &\quad + ((a_0 \otimes \dots \otimes a_n, \sigma) \circ (f_1, \dots, g_i, \dots, f_n)) \circ (x_1, \dots, x_n) \\ &= ((a_0 \otimes \dots \otimes a_n, \sigma) \circ (f_1, \dots, f_i, \dots, f_n)) \\ &\quad + ((a_0 \otimes \dots \otimes a_n, \sigma) \circ (f_1, \dots, g_i, \dots, f_n)) \circ (x_1, \dots, x_n) \\ &= ((a_0 \otimes \dots \otimes a_n, \sigma) \circ (f_1, \dots, p f_i, \dots, f_n)) \circ (x_1, \dots, x_n) \\ &= (a_0 \sigma(f_1) a_1 \dots \sigma(p f_i) \dots a_{n-1} \sigma(f_n) a_n) \circ (x_1, \dots, x_n) \\ &= a_0 \sigma(f_1 \circ x_1) a_1 \dots \sigma((p f_i) \circ x_i) \dots a_{n-1} \sigma(f_n \circ x_n) a_n \\ &= a_0 \sigma(f_1 \circ x_1) a_1 \dots \sigma(p(f_i \circ x_i)) \dots a_{n-1} \sigma(f_n \circ x_n) a_n \\ &= p(a_0 \sigma(f_1 \circ x_1) a_1 \dots \sigma(f_i \circ x_i) \dots a_{n-1} \sigma(f_n \circ x_n) a_n) \\ &= p(((a_0 \otimes \dots \otimes a_n, \sigma) \circ (f_1, \dots, f_i, \dots, f_n)) \circ (x_1, \dots, x_n)) \\ &= (p((a_0 \otimes \dots \otimes a_n, \sigma) \circ (f_1, \dots, f_i, \dots, f_n))) \circ (x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

□

THEOREM 6.6.5. Let A_1, \dots, A_n, A be associative D -algebras. For given tensor $a \in A^{\otimes n+1}$ and given transposition $\sigma \in S_n$ there exists linear map

$$h : \mathcal{L}(D; A_1 \rightarrow A) \otimes \dots \otimes \mathcal{L}(D; A_n \rightarrow A) \rightarrow \mathcal{L}(D; A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow A)$$

defined by the equation

$$(6.6.3) \quad (a_0 \otimes \dots \otimes a_n, \sigma) \circ (f_1 \otimes \dots \otimes f_n) = (a_0 \otimes \dots \otimes a_n, \sigma) \circ (f_1, \dots, f_n)$$

PROOF. The statement of the theorem is corollary of theorems 4.5.4, 6.6.4. □

THEOREM 6.6.6. Let A be associative D -algebra. Polylinear map

$$(6.6.4) \quad f : A^n \rightarrow A, a = f \circ (a_1, \dots, a_n)$$

generated by maps $I_{s \cdot 1}, \dots, I_{s \cdot n} \in \mathcal{L}(D; A \rightarrow A)$ has form

$$(6.6.5) \quad a = f_{s \cdot 0}^n \sigma_s(I_{s \cdot 1} \circ a_1) f_{s \cdot 1}^n \dots \sigma_s(I_{s \cdot n} \circ a_n) f_{s \cdot n}^n$$

where σ_s is a transposition of set of variables $\{a_1, \dots, a_n\}$

$$\sigma_s = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \\ \sigma_s(a_1) & \dots & \sigma_s(a_n) \end{pmatrix}$$

PROOF. We prove statement by induction on n .

When $n = 1$ the statement of theorem follows from the statement 6.4.8.1. In such case we may identify^{6.8}

$$f_{s \cdot p}^1 = f_{s \cdot p} \quad p = 0, 1$$

Let statement of theorem be true for $n = k - 1$. Then it is possible to represent map (6.6.4) as

$$\begin{array}{ccc} A^k & \xrightarrow{f} & A \\ & \searrow g \circ a_k & \uparrow h \\ & & A^{k-1} \end{array}$$

$$a = f \circ (a_1, \dots, a_k) = (g \circ a_k) \circ (a_1, \dots, a_{k-1})$$

According to statement of induction polylinear map h has form

$$a = h_{t \cdot 0}^{k-1} \sigma_t(I_{1 \cdot t} \circ a_1) h_{t \cdot 1}^{k-1} \dots \sigma_t(I_{k-1 \cdot t} \circ a_{k-1}) h_{t \cdot k-1}^{k-1}$$

According to construction $h = g \circ a_k$. Therefore, expressions $h_{t \cdot p}$ are functions of a_k . Since $g \circ a_k$ is linear map of a_k , then only one expression $h_{t \cdot p}$ is linear map of a_k , and rest expressions $h_{t \cdot q}$ do not depend on a_k .

^{6.8}In representation (6.6.5) we will use following rules.

- If range of any index is set consisting of one element, then we will omit corresponding index.
- If $n = 1$, then σ_s is identical transformation. We will not show such transformation in the expression.

Without loss of generality, assume $p = 0$. According to the equation (6.3.10) for given t

$$h_{t,0}^{k-1} = g_{tr,0} I_{k,r} \circ a_k g_{tr,1}$$

Assume $s = tr$. Let us define transposition σ_s according to rule

$$\sigma_s = \sigma_{tr} = \begin{pmatrix} a_k & a_1 & \dots & a_{k-1} \\ a_k & \sigma_t(a_1) & \dots & \sigma_t(a_{k-1}) \end{pmatrix}$$

Suppose

$$\begin{aligned} f_{tr,q+1}^k &= h_{t,q}^{k-1} & q = 1, \dots, k-1 \\ f_{tr,q}^k &= g_{tr,q} & q = 0, 1 \end{aligned}$$

We proved step of induction. \square

DEFINITION 6.6.7. Expression $f s \cdot p^n$ in equation (6.6.5) is called **component of polylinear map** f . \square

THEOREM 6.6.8. Consider D -algebras A . A linear map

$$h : A^{\otimes n+1} \times S_n \rightarrow {}^* \mathcal{L}(D; A^n \rightarrow A)$$

defined by the equation

$$\begin{aligned} (6.6.6) \quad (a_0 \otimes \dots \otimes a_n, \sigma) \circ (f_1 \otimes \dots \otimes f_n) &= a_0 \sigma(f_1) a_1 \dots a_{n-1} \sigma(f_n) a_n \\ a_0, \dots, a_n \in A \quad \sigma \in S_n \quad f_1, \dots, f_n \in \mathcal{L}(D; A_n \rightarrow A) \end{aligned}$$

is representation^{6.9} of algebra $A^{\otimes n+1} \times S^n$ in D -module $\mathcal{L}(D; A^n \rightarrow A)$.

PROOF. According to the theorems 6.4.8, 6.6.6, we can represent n -linear map as sum of terms (6.6.1), where f_i , $i = 1, \dots, n$, are generators of representation (6.3.3). Let us write the term s of the expression (6.6.5) as

$$(6.6.7) \quad b_1 \sigma(I_{1,s} \circ x_1) c_1 b_2 \dots c_{n-1} b_n \sigma(I_{n,s} \circ x_n) c_n$$

where

$$b_1 = f_{s,0}^n \quad b_2 = \dots = b_n = e \quad c_1 = f_{s,1}^n \quad \dots \quad c_n = f_{s,n}^n$$

Let us assume

$$f_i = \sigma^{-1}(b_i) I_{i,s} \sigma^{-1}(c_i) \quad i = 1, \dots, n$$

in equation (6.6.7). Therefore, according to theorem 6.6.3, map (6.6.6) is transformation of module $\mathcal{L}(D; A^n \rightarrow A)$. For a given tensor $c \in A^{\otimes n+1}$ and given transposition $\sigma \in S_n$, a transformation $h(c, \sigma)$ is a linear transformation of module $\mathcal{L}(D; A^n \rightarrow A)$ according to the theorem 6.6.5. According to the theorem 6.6.3, map (6.6.6) is linear map. According to the definition [4]-2.1.2, map (6.6.6) is a representation of the algebra $A^{\otimes n+1} \times S^n$ in the module $\mathcal{L}(D; A^n \rightarrow A)$. \square

THEOREM 6.6.9. Consider D -algebra A . A representation

$$h : A^{\otimes n+1} \times S_n \rightarrow {}^* \mathcal{L}(D; A^n \rightarrow A)$$

of algebra $A^{\otimes n+1}$ in module $\mathcal{L}(D; A^n \rightarrow A)$ defined by the equation (6.6.6) allows us to identify tensor $d \in A^{\otimes n+1}$ and transposition $\sigma \in S^n$ with map

$$(6.6.8) \quad (d, \sigma) \circ (f_1, \dots, f_n) \quad f_i = \delta \in \mathcal{L}(D; A \rightarrow A)$$

^{6.9}See the definition of representation of Ω -algebra in the definition [4]-2.1.2.

where $\delta \in \mathcal{L}(D; A \rightarrow A)$ is identity map.

PROOF. If we assume $f_i = \delta$, $d = a_0 \otimes \dots \otimes a_n$ in the equation (6.6.2), then the equation (6.6.2) gets form

$$(6.6.9) \quad ((a_0 \otimes \dots \otimes a_n, \sigma) \circ (\delta, \dots, \delta)) \circ (x_1, \dots, x_n) = a_0 (\delta \circ x_1) \dots (\delta \circ x_n) a_n \\ = a_0 x_1 \dots x_n a_n$$

If we assume

$$(6.6.10) \quad ((a_0 \otimes \dots \otimes a_n, \sigma) \circ (\delta, \dots, \delta)) \circ (x_1, \dots, x_n) \\ = (a_0 \otimes \dots \otimes a_n, \sigma) \circ (\delta \circ x_1, \dots, \delta \circ x_n) \\ = (a_0 \otimes \dots \otimes a_n, \sigma) \circ (x_1, \dots, x_n)$$

then comparison of equations (6.6.9) and (6.6.10) gives a basis to identify the action of the tensor $d = a_0 \otimes \dots \otimes a_n$ and transposition $\sigma \in S^n$ with map (6.6.8). \square

Instead of notation $(a_0 \otimes \dots \otimes a_n, \sigma)$, we also use notation

$$a_0 \otimes_{\sigma(1)} \dots \otimes_{\sigma(n)} a_n$$

when we want to show order of arguments in expression. For instance, the following expressions are equivalent

$$(a_0 \otimes a_1 \otimes a_2 \otimes a_3, (2, 1, 3)) \circ (x_1, x_2, x_3) = a_0 x_2 a_1 x_1 a_2 x_3 a_3 \\ (a_0 \otimes_2 a_1 \otimes_1 a_2 \otimes_3 a_3) \circ (x_1, x_2, x_3) = a_0 x_2 a_1 x_1 a_2 x_3 a_3$$

6.7. Polylinear Map into Free Finite Dimensional Associative Algebra

THEOREM 6.7.1. Let A be free finite dimensional associative algebra over the ring D . Let \bar{I} be basis of algebra $\mathcal{L}(D; A \rightarrow A)$. Let \bar{e} be the basis of the algebra A over the ring D . **Standard representation of polylinear map into associative algebra has form**

$$(6.7.1) \quad f \circ (a_1, \dots, a_n) = f_{t \cdot k_1 \dots k_n}^{i_0 \dots i_n} \bar{e}_{i_0} \sigma_t(I_{k_1} \circ a_1) \bar{e}_{i_1} \dots \sigma_t(I_{k_n} \circ a_n) \bar{e}_{i_n}$$

Index t enumerates every possible transpositions σ_t of the set of variables $\{a_1, \dots, a_n\}$. Expression $f_{t \cdot k_1 \dots k_n}^{i_0 \dots i_n}$ in equation (6.7.1) is called **standard component of polylinear map f** .

PROOF. We change index s in the equation (6.6.5) so as to group the terms with the same set of generators I_k . Expression (6.6.5) gets form

$$(6.7.2) \quad a = f_{k_1 \dots k_n \cdot s \cdot 0}^n \sigma_s(I_{k_1} \circ a_1) f_{k_1 \dots k_n \cdot s \cdot 1}^n \dots \sigma_s(I_{k_n} \circ a_n) f_{k_1 \dots k_n \cdot s \cdot n}^n$$

We assume that the index s takes values depending on k_1, \dots, k_n . Components of polylinear map f have expansion

$$(6.7.3) \quad f_{k_1 \dots k_n \cdot s \cdot p}^n = \bar{e}_i f_{k_1 \dots k_n \cdot s \cdot p}^{n i}$$

relative to basis \bar{e} . If we substitute (6.7.3) into (6.6.5), we get

$$(6.7.4) \quad a = f_{k_1 \dots k_n \cdot s \cdot 0}^{n j_1} \bar{e}_{j_1} \sigma_s(I_{k_1} \circ a_1) f_{k_1 \dots k_n \cdot s \cdot 1}^{n j_2} \bar{e}_{j_2} \dots \sigma_s(I_{k_n} \circ a_n) f_{k_1 \dots k_n \cdot s \cdot n}^{n j_n} \bar{e}_{j_n}$$

Let us consider expression

$$(6.7.5) \quad f_{t \cdot k_1 \dots k_n}^{j_0 \dots j_n} = f_{k_1 \dots k_n \cdot s \cdot 0}^{n j_1} \dots f_{k_1 \dots k_n \cdot s \cdot n}^{n j_n}$$

The right-hand side is supposed to be the sum of the terms with the index s , for which the transposition σ_s is the same. Each such sum has a unique index t . If we substitute expression (6.7.5) into equation (6.7.4) we get equation (6.7.1). \square

THEOREM 6.7.2. *Let A be free finite dimensional associative algebra over the ring D . Let \bar{e} be the basis of the algebra A over the ring D . Polylinear map (6.6.4) can be represented as D -valued form of degree n over ring D ^{6.10}*

$$(6.7.6) \quad f(a_1, \dots, a_n) = a_1^{i_1} \dots a_n^{i_n} f_{i_1 \dots i_n}$$

where

$$(6.7.7) \quad \begin{aligned} a_j &= \bar{e}_i a_j^i \\ f_{i_1 \dots i_n} &= f \circ (\bar{e}_{i_1}, \dots, \bar{e}_{i_n}) \end{aligned}$$

PROOF. According to the definition 6.1.2, the equation (6.7.6) follows from the chain of equations

$$f \circ (a_1, \dots, a_n) = f \circ (\bar{e}_{i_1} a_1^{i_1}, \dots, \bar{e}_{i_n} a_n^{i_n}) = a_1^{i_1} \dots a_n^{i_n} f \circ (\bar{e}_{i_1}, \dots, \bar{e}_{i_n})$$

Let \bar{e}' be another basis. Let

$$(6.7.8) \quad \bar{e}'_i = \bar{e}_j h_i^j$$

be transformation, map basis \bar{e} into basis \bar{e}' . From equations (6.7.8) and (6.7.7) it follows

$$(6.7.9) \quad \begin{aligned} f'_{i_1 \dots i_n} &= f \circ (\bar{e}'_{i_1}, \dots, \bar{e}'_{i_n}) \\ &= f \circ (\bar{e}_{j_1} h_{i_1}^{j_1}, \dots, \bar{e}_{j_n} h_{i_n}^{j_n}) \\ &= h_{i_1}^{j_1} \dots h_{i_n}^{j_n} f \circ (\bar{e}_{j_1}, \dots, \bar{e}_{j_n}) \\ &= h_{i_1}^{j_1} \dots h_{i_n}^{j_n} f_{j_1 \dots j_n} \end{aligned}$$

\square

Polylinear map (6.6.4) is **symmetric**, if

$$f \circ (a_1, \dots, a_n) = f \circ (\sigma(a_1), \dots, \sigma(a_n))$$

for any transposition σ of set $\{a_1, \dots, a_n\}$.

THEOREM 6.7.3. *If polyadditive map f is symmetric, then*

$$(6.7.10) \quad f_{i_1, \dots, i_n} = f_{\sigma(i_1), \dots, \sigma(i_n)}$$

PROOF. Equation (6.7.10) follows from equation

$$\begin{aligned} a_1^{i_1} \dots a_n^{i_n} f_{i_1 \dots i_n} &= f \circ (a_1, \dots, a_n) \\ &= f \circ (\sigma(a_1), \dots, \sigma(a_n)) \\ &= a_1^{i_1} \dots a_n^{i_n} f_{\sigma(i_1) \dots \sigma(i_n)} \end{aligned}$$

\square

^{6.10}We proved the theorem by analogy with theorem in [2], p. 107, 108

Polylinear map (6.6.4) is **skew symmetric**, if

$$f \circ (a_1, \dots, a_n) = |\sigma| f \circ (\sigma(a_1), \dots, \sigma(a_n))$$

for any transposition σ of set $\{a_1, \dots, a_n\}$. Here

$$|\sigma| = \begin{cases} 1 & \text{transposition } \sigma \text{ even} \\ -1 & \text{transposition } \sigma \text{ odd} \end{cases}$$

THEOREM 6.7.4. *If polylinear map f is skew symmetric, then*

$$(6.7.11) \quad f_{i_1, \dots, i_n} = |\sigma| f_{\sigma(i_1), \dots, \sigma(i_n)}$$

PROOF. Equation (6.7.11) follows from equation

$$\begin{aligned} a_1^{i_1} \dots a_n^{i_n} f_{i_1 \dots i_n} &= f \circ (a_1, \dots, a_n) \\ &= |\sigma| f \circ (\sigma(a_1), \dots, \sigma(a_n)) \\ &= a_1^{i_1} \dots a_n^{i_n} |\sigma| f_{\sigma(i_1) \dots \sigma(i_n)} \end{aligned}$$

□

THEOREM 6.7.5. *Let A be free finite dimensional associative algebra over the ring D . Let \bar{I} be basis of algebra $\mathcal{L}(D; A \rightarrow A)$. Let \bar{e} be the basis of the algebra A over the ring D . Let polylinear over ring D map f be generated by set of maps $(I_{k_1}, \dots, I_{k_n})$. Coordinates of the map f and its components relative basis \bar{e} satisfy to the equation*

$$(6.7.12) \quad f_{l_1 \dots l_n} = f_{t \cdot k_1 \dots k_n}^{i_0 \dots i_n} I_{k_1 \cdot l_1}^{j_1} \dots I_{k_n \cdot l_n}^{j_n} C_{i_0 \sigma_t(j_1)}^{k_1} C_{k_1 i_1}^{l_1} \dots B_{l_{n-1} \sigma_t(j_n)}^{k_n} C_{k_n i_n}^{l_n} \bar{e}_{l_n}$$

$$(6.7.13) \quad f_{l_1 \dots l_n}^p = f_{t \cdot k_1 \dots k_n}^{i_0 \dots i_n} I_{k_1 \cdot l_1}^{j_1} \dots I_{k_n \cdot l_n}^{j_n} C_{i_0 \sigma_t(j_1)}^{k_1} C_{k_1 i_1}^{l_1} \dots C_{l_{n-1} \sigma_t(j_n)}^{k_n} C_{k_n i_n}^p$$

PROOF. In equation (6.7.1), we assume

$$I_{k_i} \circ a_i = \bar{e}_{j_i} I_{k_i \cdot l_i}^{j_i} a_i^{l_i}$$

Then equation (6.7.1) gets form

$$\begin{aligned} (6.7.14) \quad f \circ (a_1, \dots, a_n) &= f_{t \cdot k_1 \dots k_n}^{i_0 \dots i_n} \bar{e}_{i_0} \sigma_t(a_1^{l_1} I_{k_1 \cdot l_1}^{j_1} \bar{e}_{j_1}) \bar{e}_{i_1} \dots \sigma_t(a_n^{l_n} I_{k_n \cdot l_n}^{j_n} \bar{e}_{j_n}) \bar{e}_{i_n} \\ &= a_1^{l_1} \dots a_n^{l_n} f_{t \cdot k_1 \dots k_n}^{i_0 \dots i_n} I_{k_1 \cdot l_1}^{j_1} \dots I_{k_n \cdot l_n}^{j_n} \bar{e}_{i_0} \sigma_t(\bar{e}_{j_1}) \bar{e}_{i_1} \dots \sigma_t(\bar{e}_{j_n}) \bar{e}_{i_n} \\ &= a_1^{l_1} \dots a_n^{l_n} f_{t \cdot k_1 \dots k_n}^{i_0 \dots i_n} I_{k_1 \cdot l_1}^{j_1} \dots I_{k_n \cdot l_n}^{j_n} C_{i_0 \sigma_t(j_1)}^{k_1} C_{k_1 i_1}^{l_1} \\ &\quad \dots C_{l_{n-1} \sigma_t(j_n)}^{k_n} C_{k_n i_n}^{l_n} \bar{e}_{l_n} \end{aligned}$$

From equation (6.7.6) it follows that

$$(6.7.15) \quad f \circ (a_1, \dots, a_n) = \bar{e}_p f_{i_1 \dots i_n}^p a_1^{i_1} \dots a_n^{i_n}$$

Equation (6.7.12) follows from comparison of equations (6.7.14) and (6.7.6). Equation (6.7.13) follows from comparison of equations (6.7.14) and (6.7.15). □

References

- [1] Serge Lang, Algebra, Springer, 2002
- [2] P. K. Rashevsky, Riemann Geometry and Tensor Calculus, Moscow, Nauka, 1967
- [3] Aleks Kleyn, Lectures on Linear Algebra over Division Ring, eprint [arXiv:math.GM/0701238](#) (2010)
- [4] Aleks Kleyn, Representation of Universal Algebra, eprint [arXiv:0912.3315](#) (2009)
- [5] Aleks Kleyn, Linear Maps of Free Algebra, eprint [arXiv:1003.1544](#) (2010)
- [6] Aleks Kleyn, Normed Ω -Group, eprint [arXiv:1305.4547](#) (2013)
- [7] Aleks Kleyn.
Linear Algebra over Division Ring: Vector Space.
CreateSpace Independent Publishing Platform, 2014;
ISBN-13: 978-1499324006
- [8] John C. Baez, The Octonions, eprint [arXiv:math.RA/0105155](#) (2002)
- [9] Paul M. Cohn, Universal Algebra, Springer, 1981
- [10] Richard D. Schafer, An Introduction to Nonassociative Algebras, Dover Publications, Inc., New York, 1995

Index

- Abelian multiplicative Ω -group 24
- algebra over ring 51
- associative D -algebra 51
- associative law 37
- associator of D -algebra 51
- basis for module 40
- basis of algebra $\mathcal{L}(A; A)$ 73
- basis of vector space 39
- Cartesian product of Ω -algebras 10
- category of left-side representations 12, 16
- center of D -algebra A 52
- commutative D -algebra 51
- commutator of D -algebra 51
- component of polylinear map 80
- conjugation transformation 70
- coordinates 40
- D -algebra 51
- D -module 37
- direct product of Ω -algebras 10
- distributive law 37
- effective representation of ring 37
- free algebra over ring 51
- free module over ring 40
- left shift of module 53
- linear composition of vectors 39
- linear homomorphism 55
- linear map 40, 61
- linearly dependent vectors 39
- linearly independent vectors 39
- matrix of linear homomorphism 55
- module over ring 37
- multiplicative map 24
- multiplicative Ω -group 24
- nonsingular tensor 68
- nucleus of D -algebra A 52
- orbit of linear map 68
- polylinear map 43, 61
- polylinear skew symmetric map 83
- polymorphism of representations 21
- product of objects in category 9
- reduced polymorphism of representations 22
- standard component of polylinear map 81
- standard representation of polylinear map 81
- structural constants 52
- sum of maps 40, 43
- symmetric polylinear mapping into associative algebra 82
- tensor power 30
- tensor product 30, 48
- unitarity law 37
- vector linearly dependent on vectors 39

Special Symbols and Notations

- (a, b, c) associator of D -algebra 51
 $[a, b]$ commutator of D -algebra 51
 $(A_2 \otimes A_2) \circ f$ orbit of linear map 68
 $B_1 \times \dots \times B_n$ product of objects B_1, \dots, B_n in category \mathcal{A} 9
 $B^{\otimes n}$ tensor power of representation 30
 C_{ij}^k structural constants 52
 $d f$ product of map over scalar 41, 45
 $f s \cdot p^n$ component of polylinear map 80
 $f_{t \cdot k_1 \dots k_n}^{i_0 \dots i_n}$ standard component of polylinear map 81
 $a^{i_1 \dots i_n}$ standard component of tensor 49
 $f + g$ sum of maps 40, 43
 I_k^l conjugation transformation 70
 $\mathcal{L}(D; A_1 \rightarrow A_2)$ set of linear maps 40, 61
 $\mathcal{L}(D; A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow S)$ set of polylinear maps 43, 61
 $\mathcal{L}(D; A^n \rightarrow S)$ set of n -linear maps 43, 61
 $N(A)$ nucleus of D -algebra A 52
 $B_1 \otimes \dots \otimes B_n$ tensor product 30
 $A_1 \otimes \dots \otimes A_n$ tensor product 48
 $(\mathcal{A}_1 *) \mathcal{A}_2$ category of left-side representations 12
 $(A_1 *) \mathcal{A}_2$ category of left-side representations 16
 $c^i v_i$ linear composition of vectors 39
 $Z(A)$ center of D -algebra A 52
 $\prod_{i \in I} B_i$ product of objects $\{B_i, i \in I\}$ in category \mathcal{A} 9
 $\prod_{i=1}^n B_i$ product of objects B_1, \dots, B_n in category \mathcal{A} 9

Линейное отображение D -алгебры

Александр Клейн

Aleks_Kleyn@MailAPS.org
<http://AleksKleyn.dyndns-home.com:4080/>
<http://sites.google.com/site/AleksKleyn/>
http://arxiv.org/a/kleyn_a_1
<http://AleksKleyn.blogspot.com/>

Аннотация. Модуль - это эффективное представление кольца в абелевой группе. Линейное отображение модуля над коммутативным кольцом - это морфизм соответствующего представления. Это определение является центральной темой предлагаемой книги.

Чтобы рассмотреть это определение с более общей точки зрения, в первой половине книги я рассмотрел декартово произведение представлений. Полиморфизм представлений - это отображение декартова произведения представлений, которое является морфизмом представлений по каждому отдельному аргументу. Приведенный морфизм представлений позволяет упростить изучение морфизмов представлений. Однако представление должно удовлетворять определённым требованиям для того, чтобы существовал приведенный полиморфизм представлений. Возможно, что абелева группа является единственной Ω -алгеброй, представление в которой допускает полиморфизм представлений. Однако сегодня это утверждение не доказано.

Мультипликативная Ω -группа - это Ω -алгебра, в которой определено произведение. Определение тензорного произведения представлений абелевой мультипликативной Ω -группы опирается на свойства приведенного полиморфизма представлений абелевой мультипликативной Ω -группы.

Так как алгебра - это модуль, в котором определено произведение, то мы можем применить эту теорию к изучению линейных отображений алгебры. Например, множество линейных преобразований D -алгебры A можно рассматривать как представление алгебры $A \otimes A$ в алгебре A .

Оглавление

Глава 1. Предисловие	5
1.1. Предисловие к изданию 1	5
1.2. Предисловие к изданию 2	5
1.3. Соглашения	6
Глава 2. Произведение представлений	9
2.1. Декартово произведение универсальных алгебр	9
2.2. Декартово произведение представлений	12
2.3. Приведенное декартово произведение представлений	17
Глава 3. Тензорное произведение представлений	21
3.1. Полиморфизм представлений	21
3.2. Конгруэнция	26
3.3. Тензорное произведение представлений	30
3.4. Ассоциативность тензорного произведения	36
Глава 4. D -модуль	39
4.1. Модуль над коммутативным кольцом	39
4.2. Линейное отображение D -модуля	42
4.3. Полилинейное отображение D -модуля	45
4.4. D -модуль $\mathcal{L}(D; A \rightarrow B)$	48
4.5. Тензорное произведение D -модулей	50
Глава 5. D -алгебра	53
5.1. Алгебра над коммутативным кольцом	53
5.2. Линейный гомоморфизм	57
5.3. Линейный автоморфизм алгебры кватернионов	59
Глава 6. Линейное отображение алгебры	65
6.1. Линейное отображение алгебры	65
6.2. Алгебра $\mathcal{L}(D; A \rightarrow A)$	68
6.3. Линейное отображение в ассоциативную алгебру	70
6.4. Линейное отображение в свободную конечно мерную ассоциативную алгебру	73
6.5. Линейное отображение в неассоциативную алгебру	78
6.6. Полилинейное отображение в ассоциативную алгебру	81
6.7. Полилинейное отображение в свободную конечно мерную ассоциативную алгебру	86
Список литературы	89

Предметный указатель	90
Специальные символы и обозначения	91

Предисловие

1.1. Предисловие к изданию 1

Существует несколько эквивалентных определений модуля. Для меня наиболее интересно определение модуля как эффективное представление коммутативного кольца в абелевой группе. Это позволяет рассмотреть конструкции линейной алгебры с более общей точки зрения и понять какие конструкции верны в других алгебраических теориях. Например, мы можем рассматривать линейное отображение как морфизм представления, т. е. отображение, которое сохраняет структуру представления.

Модуль, в котором определено произведение, называется алгеброй. В зависимости от решаемой задачи, мы можем рассматривать различные алгебраические структуры на алгебре. Соответственно меняются отображения, сохраняющие структуру алгебры.

Если нас не интересует представление кольца D в D -алгебре A , то алгебра A является кольцом. Отображение, сохраняющее структуру алгебры как кольца, называется гомоморфизмом алгебры. Если нас не интересует произведение в D -алгебре A , то мы рассматриваем D -алгебру как модуль. Отображение, сохраняющее структуру алгебры как модуля, называется линейным отображением D -алгебры. Линейные отображения являются важным инструментом при изучении математического анализа. Отображение, сохраняющее структуру представления, называется линейным гомоморфизмом. В разделе 5.3 я показал существование нетривиального линейного гомоморфизма.

Февраль, 2015

1.2. Предисловие к изданию 2

Основной замысел этой книги - попытка перенести в представление Ω_1 -алгебры (которую мы будем называть Ω_1 -алгеброй преобразований Ω_2 -алгебры или просто Ω_1 -алгеброй преобразований) некоторые понятия, с которыми мы хорошо знакомы в линейной алгебре. Поскольку линейное отображение - это приведенный морфизм модуля, если мы рассматриваем модуль как представление кольца в абелевой группе, то определение полиморфизма представлений является естественным обобщением полилинейного отображения.

Изучая линейное отображение над некоммутативным кольцом с делением D , мы приходим к выводу что в равенстве

$$f(ax) = af(x)$$

a не может быть произвольным элементом кольца D , но должно принадлежать центру кольца D . Это позволяет сделать теорию линейных отображений интересной и богатой.

Поэтому, также как в случае полилинейного отображения, мы требуем, чтобы преобразование, которое Ω_1 -алгебра порождает в одном сомножителе, можно было бы перенести на любой другой сомножитель. Вообще говоря, это требование не представляется жёстким, но выполнение этого требования позволяет рассматривать Ω_1 -алгебру преобразований как абелевую мультипликативную Ω_1 -группу.

Тензорное произведение векторных пространств ассоциативно. Рассмотрение ассоциативности тензорного произведения представлений порождает новое ограничение на полиморфизм представлений. Любые две операции Ω_2 -алгебры должны удовлетворять равенству (3.1.19). Возможно, что абелевая группа является единственной Ω_2 -алгеброй, представление в которой допускает полиморфизм представлений. Однако сегодня это утверждение не доказано.

Если мы верим в некоторое утверждение, которое мы не можем доказать или опровергнуть, то открытие противоположного утверждения может привести к интересным открытиям. На протяжении тысячелетий математики пытались доказать пятый постулат Евклида. Лобачевский и Больяй доказали, что существует геометрия, где этот постулат неверен. Математики пытались найти решение алгебраического уравнения, используя радикалы. Однако Галуа доказал, что это невозможно сделать, если степень уравнения выше 4.

Я долгое время полагал, что из существования приведенного морфизма представления следует существование приведенного полиморфизма представления. Теорема 3.1.13 оказалась для меня полной неожиданностью.

Я полагаю, что текст о полиморфизме и тензорном произведении представлений важен.

- Написав серию статей, посвящённых математическому анализу над банаховыми алгебрами, я полагал, что однажды я смогу написать подобную статью о математическом анализе в произвольном представлении. Меня смущала необходимость отказаться от сложения как оценки как мало расстояние между отображениями. Конечно, я могу утверждать, что морфизм представления находится в окрестности рассматриваемого отображения. Однако сложение является существенной компонентой построения. Отсутствие приведенного полиморфизма лишает меня возможности определить производные второго порядка.
- Аналогично тому, как мы рассматриваем линейное отображение D -алгебры, мы можем рассматривать линейное отображение эффективного представления в абелевой Ω_2 -группе. Структура линейного отображения эффективного представления в абелевой Ω_2 -группе сложнее чем структура линейного отображения D -алгебры. Однако это задача интересна для меня, и я надеюсь вернуться к ней в будущем.

Май, 2015

1.3. Соглашения

СОГЛАШЕНИЕ 1.3.1. Мы будем пользоваться соглашением Эйнштейна о сумме, в котором повторяющийся индекс (один вверху и один внизу) подразумевает сумму по повторяющемуся индексу. В этом случае предполагается

известным множеством индексов суммирования и знак суммы опускается

$$c^i v_i = \sum_{i \in I} c^i v_i$$

□

СОГЛАШЕНИЕ 1.3.2. В выражении вида

$$a_{i \cdot 0} x a_{i \cdot 1}$$

предполагается сумма по индексу i .

□

СОГЛАШЕНИЕ 1.3.3. Пусть A - свободная алгебра с конечным или счётным базисом. При разложении элемента алгебры A относительно базиса \bar{e} мы пользуемся одной и той же корневой буквой для обозначения этого элемента и его координат. В выражении a^2 не ясно - это компонента разложения элемента a относительно базиса или это операция возведения в степень. Для облегчения чтения текста мы будем индекс элемента алгебры выделять цветом. Например,

$$a = a^i e_i$$

□

СОГЛАШЕНИЕ 1.3.4. Если свободная конечномерная алгебра имеет единицу, то мы будем отождествлять вектор базиса \bar{e}_0 с единицей алгебры.

□

Произведение представлений

2.1. Декартово произведение универсальных алгебр

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1.1. Пусть \mathcal{A} - категория. Пусть $\{B_i, i \in I\}$ - множество объектов из \mathcal{A} . Объект

$$P = \prod_{i \in I} B_i$$

и множество морфизмов

$$\{f_i : P \longrightarrow B_i, i \in I\}$$

называется **произведением объектов** $\{B_i, i \in I\}$ в категории \mathcal{A} ^{2.1}, если для любого объекта R и множества морфизмов

$$\{g_i : R \longrightarrow B_i, i \in I\}$$

существует единственный морфизм

$$h : R \longrightarrow P$$

такой, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{f_i} & B_i \\ \uparrow h & \nearrow g_i & \\ R & & \end{array} \quad f_i \circ h = g_i$$

коммутативна для всех $i \in I$.

Если $|I| = n$, то для произведения объектов $\{B_i, i \in I\}$ в \mathcal{A} мы так же будем пользоваться записью

$$P = \prod_{i=1}^n B_i = B_1 \times \dots \times B_n$$

□

ПРИМЕР 2.1.2. Пусть \mathcal{S} - категория множеств.^{2.2} Согласно определению 2.1.1, декартово произведение

$$A = \prod_{i \in I} A_i$$

семейства множеств $(A_i, i \in I)$ и семейство проекций на i -й множитель

$$p_i : A \rightarrow A_i$$

^{2.1}Определение дано согласно [1], страница 45.

^{2.2}Смотри также пример в [1], страница 45.

являются произведением в категории \mathcal{S} . \square

ТЕОРЕМА 2.1.3. *Произведение существует в категории \mathcal{A} Ω -алгебр. Пусть Ω -алгебра A и семейство морфизмов*

$$p_i : A \rightarrow A_i \quad i \in I$$

является произведением в категории \mathcal{A} . Тогда

2.1.3.1: *Множество A является декартовым произведением семейства множеств $(A_i, i \in I)$*

2.1.3.2: *Гомоморфизм Ω -алгебры*

$$p_i : A \rightarrow A_i$$

является проекцией на i -й множитель.

2.1.3.3: *Любое A -число a может быть однозначно представлено в виде кортежа $(p_i(a), i \in I)$ A_i -чисел.*

2.1.3.4: *Пусть $\omega \in \Omega$ - n -арная операция. Тогда операция ω определена покомпонентно*

$$(2.1.1) \quad a_1 \dots a_n \omega = (a_{1i} \dots a_{ni} \omega, i \in I)$$

где $a_1 = (a_{1i}, i \in I)$, ..., $a_n = (a_{ni}, i \in I)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$A = \prod_{i \in I} A_i$$

декартово произведение семейства множеств $(A_i, i \in I)$ и, для каждого $i \in I$, отображение

$$p_i : A \rightarrow A_i$$

является проекцией на i -й множитель. Рассмотрим диаграмму морфизмов в категории множеств \mathcal{S}

$$(2.1.2) \quad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{p_i} & A_i \\ \omega \uparrow & \nearrow g_i & \\ A^n & & \end{array} \quad p_i \circ \omega = g_i$$

где отображение g_i определено равенством

$$g_i(a_1, \dots, a_n) = p_i(a_1) \dots p_i(a_n) \omega$$

Согласно определению 2.1.1, отображение ω определено однозначно из множества диаграмм (2.1.2)

$$(2.1.3) \quad a_1 \dots a_n \omega = (p_i(a_1) \dots p_i(a_n) \omega, i \in I)$$

Равенство (2.1.1) является следствием равенства (2.1.3). \square

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1.4. *Если Ω -алгебра A и семейство морфизмов*

$$p_i : A \rightarrow A_i \quad i \in I$$

*является произведением в категории \mathcal{A} , то Ω -алгебра A называется **прямым** или **декартовым произведением Ω -алгебр** $(A_i, i \in I)$. \square*

ТЕОРЕМА 2.1.5. Пусть множество A является декартовым произведением множеств $(A_i, i \in I)$ и множество B является декартовым произведением множеств $(B_i, i \in I)$. Для каждого $i \in I$, пусть

$$f_i : A_i \rightarrow B_i$$

является отображением множества A_i в множество B_i . Для каждого $i \in I$, рассмотрим коммутативную диаграмму

$$(2.1.4) \quad \begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{p'_i} & B_i \\ f \uparrow & & \uparrow f_i \\ A & \xrightarrow{p_i} & A_i \end{array}$$

где отображения p_i, p'_i являются проекцией на i -й множитель. Множество коммутативных диаграмм (2.1.4) однозначно определяет отображение

$$f : A_1 \rightarrow A_2$$

$$f(a_i, i \in I) = (f_i(a_i), i \in I)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждого $i \in I$, рассмотрим коммутативную диаграмму

$$(2.1.5) \quad \begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{p'_i} & B_i \\ f \uparrow & \nearrow g_i & \uparrow f_i \\ A & \xrightarrow{p_i} & A_i \end{array}$$

(1) (2)

Пусть $a \in A$. Согласно утверждению 2.1.3.3, A -число a может быть представлено в виде кортежа A_i -чисел

$$(2.1.6) \quad a = (a_i, i \in I) \quad a_i = p_i(a) \in A_i$$

Пусть

$$(2.1.7) \quad b = f(a) \in B$$

Согласно утверждению 2.1.3.3, B -число b может быть представлено в виде кортежа B_i -чисел

$$(2.1.8) \quad b = (b_i, i \in I) \quad b_i = p'_i(b) \in B_i$$

Из коммутативности диаграммы (1) и из равенств (2.1.7), (2.1.8) следует, что

$$(2.1.9) \quad b_i = g_i(b)$$

Из коммутативности диаграммы (2) и из равенства (2.1.6) следует, что

$$b_i = f_i(a_i)$$

□

ТЕОРЕМА 2.1.6. Пусть Ω -алгебра A является декартовым произведением Ω -алгебр $(A_i, i \in I)$ и Ω -алгебра B является декартовым произведением Ω -алгебр $(B_i, i \in I)$. Для каждого $i \in I$, пусть отображение

$$f_i : A_i \rightarrow B_i$$

является гомоморфизмом Ω -алгебры. Тогда отображение

$$f : A_1 \rightarrow A_2$$

определённое равенством

$$(2.1.10) \quad f(a_i, i \in I) = (f_i(a_i), i \in I)$$

является гомоморфизмом Ω -алгебры.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\omega \in \Omega$ - n -арная операция. Пусть $a_1 = (a_{1i}, i \in I)$, ..., $a_n = (a_{ni}, i \in I)$ и $b_1 = (b_{1i}, i \in I)$, ..., $b_n = (b_{ni}, i \in I)$. Из равенств (2.1.1), (2.1.10) следует, что

$$\begin{aligned} f(a_1 \dots a_n \omega) &= f(a_{1i} \dots a_{ni} \omega, i \in I) \\ &= (f_i(a_{1i} \dots a_{ni} \omega), i \in I) \\ &= ((f_i(a_{1i})) \dots (f_i(a_{ni}))), i \in I) \\ &= (b_{1i} \dots b_{ni} \omega, i \in I) \\ f(a_1) \dots f(a_n) \omega &= b_1 \dots b_n \omega = (b_{1i} \dots b_{ni} \omega, i \in I) \end{aligned}$$

□

2.2. Декартово произведение представлений

ЛЕММА 2.2.1. Пусть

$$A = \prod_{i \in I} A_i$$

декартово произведение семейства Ω_1 -алгебр $(A_i, i \in I)$. Для каждого $i \in I$, пусть множество *A_i является Ω_2 -алгеброй. Тогда множество

$$(2.2.1) \quad {}^\circ A = \{f \in {}^*A : f(a_i, i \in I) = (f_i(a_i), i \in I)\}$$

является декартовым произведением Ω_2 -алгебр *A_i .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно определению (2.2.1), мы можем представить отображение $f \in {}^\circ A$ в виде кортежа

$$f = (f_i, i \in I)$$

отображений $f_i \in {}^*A_i$. Согласно определению (2.2.1),

$$(f_i, i \in I)(a_i, i \in I) = (f_i(a_i), i \in I)$$

Пусть $\omega \in \Omega_2$ - n -арная операция. Мы определим операцию ω на множестве ${}^\circ A$ равенством

$$((f_{1i}, i \in I) \dots (f_{ni}, i \in I) \omega)(a_i, i \in I) = ((f_{1i}(a_i)) \dots (f_{ni}(a_i))) \omega, i \in I$$

□

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2.2. Пусть \mathcal{A}_1 - категория Ω_1 -алгебр. Пусть \mathcal{A}_2 - категория Ω_2 -алгебр. Мы определим категорию $(\mathcal{A}_1*)\mathcal{A}_2$ левосторонних представлений. Объектами этой категории являются левосторонние представления Ω_1 -алгебры в Ω_2 -алгебре. Морфизмами этой категории являются морфизмы соответствующих представлений. \square

ТЕОРЕМА 2.2.3. В категории $(\mathcal{A}_1*)\mathcal{A}_2$ существует произведение однотранзитивных левосторонних представлений Ω_1 -алгебры в Ω_2 -алгебре.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $j = 1, 2$, пусть

$$P_j = \prod_{i \in I} B_{ji}$$

произведение семейства Ω_j -алгебр $\{B_{ji}, i \in I\}$ и для любого $i \in I$ отображение

$$t_{ji} : P_j \longrightarrow B_{ji}$$

является проекцией на множитель i . Для каждого $i \in I$, пусть

$$h_i : B_{1i} \multimap B_{2i}$$

однотранзитивное B_{1i} -представление в Ω_2 -алгебре B_{2i} .

Пусть $b_1 \in P_1$. Согласно утверждению 2.1.3.3, P_1 -число b_1 может быть представлено в виде кортежа B_{1i} -чисел

$$(2.2.2) \quad b_1 = (b_{1i}, i \in I) \quad b_{1i} = t_{1i}(b_1) \in B_{1i}$$

Пусть $b_2 \in P_2$. Согласно утверждению 2.1.3.3, P_2 -число b_2 может быть представлено в виде кортежа B_{2i} -чисел

$$(2.2.3) \quad b_2 = (b_{2i}, i \in I) \quad b_{2i} = t_{2i}(b_2) \in B_{2i}$$

ЛЕММА 2.2.4. Для каждого $i \in I$, рассмотрим диаграмму отображений

$$(2.2.4) \quad \begin{array}{ccccc} & & P_2 & \xrightarrow{t_{2i}} & B_{2i} \\ & & & \searrow & \nearrow \\ & & & g(b_1) & \\ & & & \nearrow & \searrow \\ & & & h_i & \\ & & & \nearrow & \searrow \\ & & & h_i(b_{1i}) & \\ & & & \nearrow & \searrow \\ P_1 & \xrightarrow{t_{1i}} & B_{1i} & \xrightarrow{h_i} & B_{2i} \end{array} \quad (1)$$

Пусть отображение

$$g : P_1 \rightarrow *P_2$$

определено равенством

$$(2.2.5) \quad g(b_1) \circ b_2 = (h_i(b_{1i}) \circ b_{2i}, i \in I)$$

Тогда отображение g является однотранзитивным P_1 -представлением в Ω_2 -алгебре P_2

$$g : P_1 \multimap P_2$$

Отображение (t_{1i}, t_{2i}) является морфизмом представления g в представлении h_i .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

2.2.4.1: Согласно определениям [4]-2.1.1, [4]-2.1.2, отображение $h_i(b_{1i})$ является гомоморфизмом Ω_2 -алгебры B_{2i} . Согласно теореме 2.1.6, из коммутативности диаграммы (1) для каждого $i \in I$, следует, что отображение

$$g(b_1) : P_2 \rightarrow P_2$$

определённое равенством (2.2.5) является гомоморфизмом Ω_2 -алгебры P_2 .

2.2.4.2: Согласно определению [4]-2.1.2, множество ${}^*B_{2i}$ является Ω_1 -алгеброй. Согласно лемме 2.2.1, множество ${}^\circ P_2 \subseteq {}^*P_2$ является Ω_1 -алгеброй.

2.2.4.3: Согласно определению [4]-2.1.2, отображение

$$h_i : B_{1i} \rightarrow {}^*B_{2i}$$

является гомоморфизмом Ω_1 -алгебры. Согласно теореме 2.1.6, отображение

$$g : P_1 \rightarrow {}^*P_2$$

определённое равенством

$$g(b_1) = (h_i(b_{1i}), i \in I)$$

является гомоморфизмом Ω_1 -алгебры.

Согласно утверждениям 2.2.4.1, 2.2.4.3 и определению [4]-2.1.2, отображение g является P_1 -представлением в Ω_2 -алгебре P_2 .

Пусть $b_{21}, b_{22} \in P_2$. Согласно утверждению 2.1.3.3, P_2 -числа b_{21}, b_{22} могут быть представлены в виде кортежей B_{2i} -чисел

$$(2.2.6) \quad \begin{aligned} b_{21} &= (b_{21i}, i \in I) \quad b_{21i} = t_{2i}(b_{21}) \in B_{2i} \\ b_{22} &= (b_{22i}, i \in I) \quad b_{22i} = t_{2i}(b_{22}) \in B_{2i} \end{aligned}$$

Согласно теореме [4]-2.1.9, поскольку представление h_i однотранзитивно, то существует единственное B_{1i} -число b_{1i} такое, что

$$b_{22i} = h_i(b_{1i}) \circ b_{21i}$$

Согласно определениям (2.2.2), (2.2.5), (2.2.6), существует единственное P_1 -число b_1 такое, что

$$b_{22} = g(b_1) \circ b_{21}$$

Согласно теореме [4]-2.1.9, представление g однотранзитивно.

Из коммутативности диаграммы (1) и определения [4]-2.2.2, следует, что отображение (t_{1i}, t_{2i}) является морфизмом представления g в представление h_i . \odot

Пусть

$$(2.2.7) \quad d_2 = g(b_1) \circ b_2 \quad d_2 = (d_{2i}, i \in I)$$

Из равенств (2.2.5), (2.2.7) следует, что

$$(2.2.8) \quad d_{2i} = h_i(b_{1i}) \circ b_{2i}$$

Для $j = 1, 2$, пусть R_j - другой объект категории \mathcal{A}_j . Для любого $i \in I$, пусть отображение

$$r_{1i} : R_1 \longrightarrow B_{1i}$$

является морфизмом из Ω_1 -алгебра R_1 в Ω_1 -алгебру B_{1i} . Согласно определению 2.1.1, существует единственный морфизм Ω_1 -алгебры

$$s_1 : R_1 \longrightarrow P_1$$

такой, что коммутативна диаграмма

$$(2.2.9) \quad \begin{array}{ccc} P_1 & \xrightarrow{t_{1i}} & B_{1i} \\ s_1 \uparrow & \searrow r_{1i} & \\ R_1 & & \end{array} \quad t_{1i} \circ s_1 = r_{1i}$$

Пусть $a_1 \in R_1$. Пусть

$$(2.2.10) \quad b_1 = s_1(a_1) \in P_1$$

Из коммутативности диаграммы (2.2.9) и утверждений (2.2.10), (2.2.2) следует, что

$$(2.2.11) \quad b_{1i} = r_{1i}(a_1)$$

Пусть

$$f : R_1 \dashrightarrow R_2$$

однотранзитивное R_1 -представление в Ω_2 -алгебре R_2 . Согласно теореме [4]-2.2.10, морфизм Ω_2 -алгебры

$$r_{2i} : R_2 \longrightarrow B_{2i}$$

такой, что отображение (r_{1i}, r_{2i}) является морфизмом представлений из f в h_i , определённо однозначно с точностью до выбора образа R_2 -числа a_2 . Согласно замечанию [4]-2.2.6, в диаграмме отображений

$$(2.2.12) \quad \begin{array}{ccccc} & & B_{1i} & \xrightarrow{h_i} & B_{2i} \\ & & \uparrow r_{1i} & & \uparrow r_{2i} \\ R_1 & \xrightarrow{f} & R_2 & \xrightarrow{f(a_1)} & R_2 \\ & & \downarrow r_{2i} & & \downarrow r_{2i} \\ & & B_{2i} & & \end{array} \quad \begin{array}{l} h_i(b_{1i}) \\ (2) \end{array}$$

диаграмма (2) коммутативна. Согласно определению 2.1.1, существует единственный морфизм Ω_2 -алгебры

$$s_2 : R_2 \longrightarrow P_2$$

такой, что коммутативна диаграмма

$$(2.2.13) \quad \begin{array}{ccc} P_2 & \xrightarrow{t_{2i}} & B_{2i} \\ s_2 \uparrow & \searrow r_{2i} & \\ R_2 & & \end{array} \quad t_{2i} \circ s_2 = r_{2i}$$

Пусть $a_2 \in R_2$. Пусть

$$(2.2.14) \quad b_2 = s_2(a_2) \in P_2$$

Из коммутативности диаграммы (2.2.13) и утверждений (2.2.14), (2.2.3) следует, что

$$(2.2.15) \quad b_{2i} = r_{2i}(a_2)$$

Пусть

$$(2.2.16) \quad c_2 = f(a_1) \circ a_2$$

Из коммутативности диаграммы (2) и равенств (2.2.8), (2.2.15), (2.2.16) следует, что

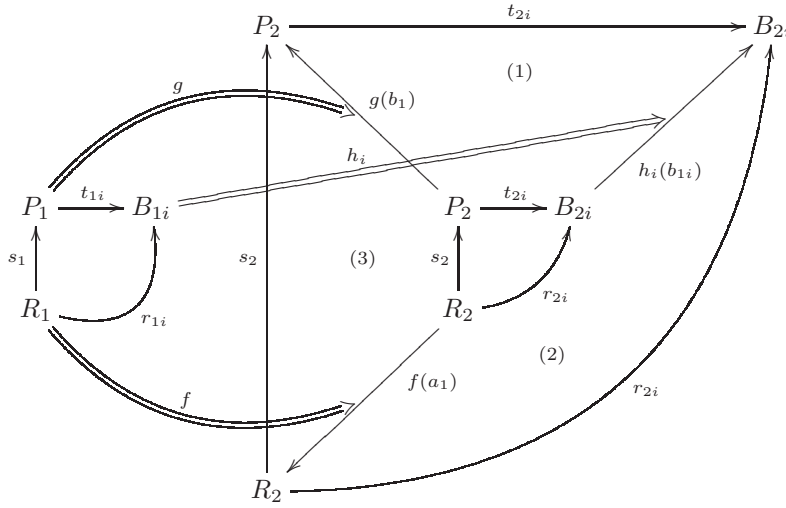
$$(2.2.17) \quad d_{2i} = r_{2i}(c_2)$$

Из равенств (2.2.8), (2.2.17) следует, что

$$(2.2.18) \quad d_2 = s_2(c_2)$$

что согласуется с коммутативностью диаграммы (2.2.13).

Для каждого $i \in I$, мы объединим диаграммы отображений (2.2.4), (2.2.9), (2.2.13), (2.2.12)



Из равенств (2.2.7) (2.2.14) и из равенств (2.2.16), (2.2.18), следует коммутативность диаграммы (3). Следовательно, отображение (s_1, s_2) является морфизмом представлений из f в g . Согласно теореме [4]-2.2.10, морфизм (s_1, s_2) определён однозначно, так как мы требуем (2.2.18).

Согласно определению 2.1.1, представление g и семейство морфизмов представления $((t_{1i}, t_{2i}), i \in I)$ является произведением в категории $(\mathcal{A}_1 *) \mathcal{A}_2$. \square

2.3. Приведенное декартово произведение представлений

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3.1. Пусть A_1 - Ω_1 -алгебра. Пусть A_2 - категория Ω_2 -алгебр. Мы определим категорию $(A_1*)A_2$ левосторонних представлений. Объектами этой категории являются левосторонние представления Ω_1 -алгебры A_1 в Ω_2 -алгебре. Морфизмами этой категории являются приведенные морфизмы соответствующих представлений. \square

ТЕОРЕМА 2.3.2. В категории $(A_1*)A_2$ существует произведение эффективных левосторонних представлений Ω_1 -алгебры A_1 в Ω_2 -алгебре и это произведение является эффективным левосторонним представлением Ω_1 -алгебры A_1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$A_2 = \prod_{i \in I} A_{2i}$$

произведение семейства Ω_2 -алгебр $\{A_{2i}, i \in I\}$ и для любого $i \in I$ отображение

$$t_i : A_2 \longrightarrow A_{2i}$$

является проекцией на множитель i . Для каждого $i \in I$, пусть

$$h_i : A_1 \dashrightarrow A_{2i}$$

эффективное A_1* -представление в Ω_2 -алгебре A_{2i} .

Пусть $b_1 \in A_1$. Пусть $b_2 \in A_2$. Согласно утверждению 2.1.3.3, A_2 -число b_2 может быть представлено в виде кортежа A_{2i} -чисел

$$(2.3.1) \quad b_2 = (b_{2i}, i \in I) \quad b_{2i} = t_i(b_2) \in A_{2i}$$

ЛЕММА 2.3.3. Для каждого $i \in I$, рассмотрим диаграмму отображений

$$(2.3.2) \quad \begin{array}{ccccc} & & A_2 & \xrightarrow{t_i} & A_{2i} \\ & \nearrow g & & \searrow g(b_1) & \\ & & A_2 & \xrightarrow{t_i} & A_{2i} \\ & \nwarrow h_i & & \nearrow h_i(b_1) & \\ A_1 & & & & \end{array} \quad (1)$$

Пусть отображение

$$g : A_1 \rightarrow *A_2$$

определено равенством

$$(2.3.3) \quad g(b_1) \circ b_2 = (h_i(b_1) \circ b_{2i}, i \in I)$$

Тогда отображение g является эффективным A_1* -представлением в Ω_2 -алгебре A_2

$$g : A_1 \dashrightarrow A_2$$

Отображение t_i является приведенным морфизмом представления g в представление h_i .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

2.3.3.1: Согласно определениям [4]-2.1.1, [4]-2.1.2, отображение $h_i(b_1)$ является гомоморфизмом Ω_2 -алгебры A_{2i} . Согласно теореме 2.1.6, из коммутативности диаграммы (1) для каждого $i \in I$, следует, что отображение

$$g(b_1) : A_2 \rightarrow A_2$$

определённое равенством (2.3.3) является гомоморфизмом Ω_2 -алгебры A_2 .

2.3.3.2: Согласно определению [4]-2.1.2, множество ${}^*A_{2i}$ является Ω_1 -алгеброй. Согласно лемме 2.2.1, множество ${}^\circ A_2 \subseteq {}^*A_2$ является Ω_1 -алгеброй.

2.3.3.3: Согласно определению [4]-2.1.2, отображение

$$h_i : A_1 \rightarrow {}^*A_{2i}$$

является гомоморфизмом Ω_1 -алгебры. Согласно теореме 2.1.6, отображение

$$g : A_1 \rightarrow {}^*A_2$$

определённое равенством

$$g(b_1) = (h_i(b_1), i \in I)$$

является гомоморфизмом Ω_1 -алгебры.

Согласно утверждениям 2.3.3.1, 2.3.3.3 и определению [4]-2.1.2, отображение g является A_1 -представлением в Ω_2 -алгебре A_2 .

Для любого $i \in I$, согласно определению [4]-2.1.6, A_1 -число a_1 порождает единственное преобразование

$$(2.3.4) \quad b_{22i} = h_i(b_1) \circ b_{21i}$$

Пусть $b_{21}, b_{22} \in A_2$. Согласно утверждению 2.1.3.3, A_2 -числа b_{21}, b_{22} могут быть представлены в виде кортежей A_{2i} -чисел

$$(2.3.5) \quad \begin{aligned} b_{21} &= (b_{21i}, i \in I) & b_{21i} &= t_i(b_{21}) \in A_{2i} \\ b_{22} &= (b_{22i}, i \in I) & b_{22i} &= t_i(b_{22}) \in A_{2i} \end{aligned}$$

Согласно определению (2.3.3) представления g , из равенств (2.3.4), (2.3.5) следует, что A_1 -число a_1 порождает единственное преобразование

$$(2.3.6) \quad b_{22} = (h_i(b_1) \circ b_{21i}, i \in I) = g(b_1) \circ b_{21}$$

Согласно определению [4]-2.1.6, представление g эффективно.

Из коммутативности диаграммы (1) и определения [4]-2.2.2, следует, что отображение t_i является приведенным морфизмом представления g в представление h_i . ⊙

Пусть

$$(2.3.7) \quad d_2 = g(b_1) \circ b_2 \quad d_2 = (d_{2i}, i \in I)$$

Из равенств (2.3.3), (2.3.7) следует, что

$$(2.3.8) \quad d_{2i} = h_i(b_1) \circ b_{2i}$$

Пусть R_2 - другой объект категории \mathcal{A}_2 . Пусть

$$f : A_1 \dashrightarrow R_2$$

эффективное A_1 -представление в Ω_2 -алгебре R_2 . Для любого $i \in I$, пусть существует морфизм

$$r_i : R_2 \longrightarrow A_{2i}$$

представлений из f в h_i . Согласно замечанию [4]-2.2.6, в диаграмме отображений

(2.3.9)

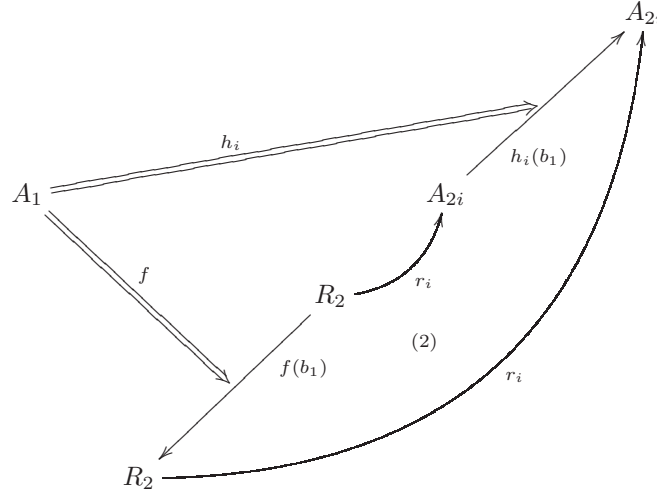


диаграмма (2) коммутативна. Согласно определению 2.1.1, существует единственный морфизм Ω_2 -алгебры

$$s : R_2 \longrightarrow A_2$$

такой, что коммутативна диаграмма

(2.3.10)

$$\begin{array}{ccc} A_2 & \xrightarrow{t_i} & A_{2i} \\ s \uparrow & & \uparrow r_i \\ R_2 & & \end{array} \quad t_i \circ s = r_i$$

Пусть $a_2 \in R_2$. Пусть

(2.3.11)

$$b_2 = s(a_2) \in A_2$$

Из коммутативности диаграммы (2.3.10) и утверждений (2.3.11), (2.3.1) следует, что

(2.3.12)

$$b_{2i} = r_i(a_2)$$

Пусть

(2.3.13)

$$c_2 = f(a_1) \circ a_2$$

Из коммутативности диаграммы (2) и равенств (2.3.8), (2.3.12), (2.3.13) следует, что

(2.3.14)

$$d_{2i} = r_i(c_2)$$

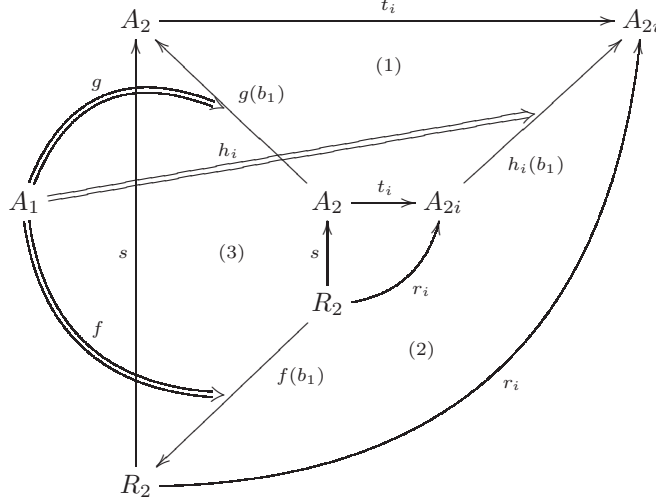
Из равенств (2.3.8), (2.3.14) следует, что

(2.3.15)

$$d_2 = s(c_2)$$

что согласуется с коммутативностью диаграммы (2.3.10).

Для каждого $i \in I$, мы объединим диаграммы отображений (2.3.2), (2.3.10), (2.3.9)



Из равенств (2.3.7), (2.3.11) и из равенств (2.3.13), (2.3.15), следует коммутативность диаграммы (3). Следовательно, отображение s является приведенным морфизмом представлений из f в g . Согласно замечанию [4]-2.3.2, отображение s является гомоморфизмом Ω_2 алгебры. Согласно теореме 2.1.3 и определению 2.1.1, приведенный морфизм s определен однозначно.

Согласно определению 2.1.1, представление g и семейство морфизмов представления $(t_i, i \in I)$ является произведением в категории $(A_1*)\mathcal{A}_2$. \square

Тензорное произведение представлений

3.1. Полиморфизм представлений

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1.1. Пусть A_1, \dots, A_n - Ω_1 -алгебры. Пусть B_1, \dots, B_n, B - Ω_2 -алгебры. Пусть для любого $k, k = 1, \dots, n$,

$$f_k : A_k \dashrightarrow B_k$$

представление Ω_1 -алгебры A_k в Ω_2 -алгебре B_k . Пусть

$$f : A \dashrightarrow B$$

представление Ω_1 -алгебры A в Ω_2 -алгебре B . Отображение

$$r : A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow A \quad R : B_1 \times \dots \times B_n \rightarrow B$$

называется **полиморфизмом представлений** f_1, \dots, f_n в представление f , если для любого $k, k = 1, \dots, n$, при условии, что все переменные кроме переменных $a_k \in A_k, b_k \in B_k$ имеют заданное значение, отображение (r, R) является морфизмом представления f_k в представление f .

Если $f_1 = \dots = f_n$, то мы будем говорить, что отображение (r, R) является полиморфизмом представления f_1 в представление f .

Если $f_1 = \dots = f_n = f$, то мы будем говорить, что отображение (r, R) является полиморфизмом представления f . \square

ТЕОРЕМА 3.1.2. Пусть отображение (r, R) является полиморфизмом представлений f_1, \dots, f_n в представление f . Отображение (r, R) удовлетворяет равенству

$$(3.1.1) \quad R(f_1(a_1)(m_1), \dots, f_n(a_n)(m_n)) = f(r(a_1, \dots, a_n))(R(m_1, \dots, m_n))$$

Пусть $\omega_1 \in \Omega_1(p)$. Для любого $k, k = 1, \dots, n$, отображение r удовлетворяет равенству

$$(3.1.2) \quad \begin{aligned} & r(a_1, \dots, a_{k-1} \dots a_{k,p} \omega_1, \dots, a_n) \\ &= r(a_1, \dots, a_{k-1}, \dots, a_n) \dots r(a_1, \dots, a_{k,p}, \dots, a_n) \omega_1 \end{aligned}$$

Пусть $\omega_2 \in \Omega_2(p)$. Для любого $k, k = 1, \dots, n$, отображение R удовлетворяет равенству

$$(3.1.3) \quad \begin{aligned} & R(m_1, \dots, m_{k-1} \dots m_{k,p} \omega_2, \dots, m_n) \\ &= R(m_1, \dots, m_{k-1}, \dots, m_n) \dots R(m_1, \dots, m_{k,p}, \dots, m_n) \omega_2 \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенство (3.1.1) следует из определения 3.1.1 и равенства [4]-(2.2.4). Равенство (3.1.2) следует из утверждения, что для любого k ,

$k = 1, \dots, n$, при условии, что все переменные кроме переменной $x_k \in A_k$ имеют заданное значение, отображение r является гомоморфизмом Ω_1 -алгебры A_k в Ω_1 -алгебру A . Равенство (3.1.3) следует из утверждения, что для любого k , $k = 1, \dots, n$, при условии, что все переменные кроме переменной $m_k \in B_k$ имеют заданное значение, отображение R является гомоморфизмом Ω_2 -алгебры B_k в Ω_2 -алгебру B . \square

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1.3. Пусть A, B_1, \dots, B_n, B - универсальные алгебры. Пусть для любого k , $k = 1, \dots, n$,

$$f_k : A \multimap B_k$$

эффективное представление Ω_1 -алгебры A_k в Ω_2 -алгебре B_k . Пусть

$$f : A \multimap B$$

эффективное представление Ω_1 -алгебры A в Ω_2 -алгебре B . Отображение

$$r_2 : B_1 \times \dots \times B_n \rightarrow B$$

называется **приведенным полиморфизмом представлений** f_1, \dots, f_n в представление f , если для любого k , $k = 1, \dots, n$, при условии, что все переменные кроме переменной $x_k \in B_k$ имеют заданное значение, отображение R является приведенным морфизмом представления f_k в представление f .

Если $f_1 = \dots = f_n$, то мы будем говорить, что отображение R является приведенным полиморфизмом представления f_1 в представление f .

Если $f_1 = \dots = f_n = f$, то мы будем говорить, что отображение R является приведенным полиморфизмом представления f . \square

ТЕОРЕМА 3.1.4. Пусть отображение R является приведенным полиморфизмом эффективных представлений f_1, \dots, f_n в эффективное представление f . Для любого k , $k = 1, \dots, n$, отображение R удовлетворяет равенству

$$(3.1.4) \quad R(m_1, \dots, f_k(a) \circ m_k, \dots, m_n) = f(a) \circ R(m_1, \dots, m_n)$$

Пусть $\omega_2 \in \Omega_2(p)$. Для любого k , $k = 1, \dots, n$, отображение R удовлетворяет равенству

$$(3.1.5) \quad \begin{aligned} & R(m_1, \dots, m_{k-1} \dots m_{k \cdot p} \omega_2, \dots, m_n) \\ &= R(m_1, \dots, m_{k-1}, \dots, m_n) \dots R(m_1, \dots, m_{k \cdot p}, \dots, m_n) \omega_2 \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенство (3.1.4) следует из определения 3.1.3 и равенства [4]-(2.3.3). Равенство (3.1.5) следует из утверждения, что для любого k , $k = 1, \dots, n$, при условии, что все переменные кроме переменной $m_k \in B_k$ имеют заданное значение, отображение R является гомоморфизмом Ω_2 -алгебры B_k в Ω_2 -алгебру B . \square

Мы также будем говорить, что отображение (r, R) является полиморфизмом представлений в Ω_2 -алгебрах B_1, \dots, B_n в представление в Ω_2 -алгебре B . Аналогично, мы будем говорить, что отображение R является приведенным полиморфизмом представлений в Ω_2 -алгебрах B_1, \dots, B_n в представление в Ω_2 -алгебре B .

Сравнение определений 3.1.1 и 3.1.3 показывает, что существует разница между этими двумя формами полиморфизма. Особенно хорошо это различие

видно при сравнении равенств (3.1.1) и (3.1.4). Если мы хотим иметь возможность выразить приведенный полиморфизм представлений через полиморфизм представлений, то мы должны потребовать, два условия:

- (1) Представление f универсальной алгебры содержит тождественное преобразование δ . Следовательно, существует $e \in A$ такой, что $f(e) = \delta$. Не нарушая общности, мы положим, что выбор $e \in A$ не зависит от того, какое представление f_1, \dots, f_n мы рассматриваем.
- (2) Для любого $k, k = 1, \dots, n$,

$$(3.1.6) \quad r(a_1, \dots, a_n) = a_k \quad a_i = e \quad i \neq k$$

Тогда, при условии $a_i = e, i \neq k$, равенство (3.1.1) имеет вид

$$(3.1.7) \quad R(m_1, \dots, f_k(a_k) \circ m_k, \dots, m_n) = f(r(e, \dots, a_k, \dots, e)) \circ R(m_1, \dots, m_n)$$

Очевидно, что равенство (3.1.7) совпадает с равенством (3.1.4).

Похожая задача появляется при анализе приведенного полиморфизма представлений. Пользуясь равенством (3.1.4), мы можем записать выражение

$$(3.1.8) \quad R(m_1, \dots, f_k(a_k) \circ m_k, \dots, f_l(a_l) \circ m_l, \dots, m_n)$$

либо в виде

$$(3.1.9) \quad \begin{aligned} & R(m_1, \dots, f_k(a_k) \circ m_k, \dots, f_l(a_l) \circ m_l, \dots, m_n) \\ &= f(a_k) \circ R(m_1, \dots, m_k, \dots, f_l(a_l) \circ m_l, \dots, m_n) \\ &= f(a_k) \circ (f(a_l) \circ R(m_1, \dots, m_k, \dots, m_l, \dots, m_n)) \\ &= (f(a_k) \circ f(a_l)) \circ R(m_1, \dots, m_k, \dots, m_l, \dots, m_n) \end{aligned}$$

либо в виде

$$(3.1.10) \quad \begin{aligned} & R(m_1, \dots, f_k(a_k) \circ m_k, \dots, f_l(a_l) \circ m_l, \dots, m_n) \\ &= f(a_l) \circ R(m_1, \dots, f_k(a_k) \circ m_k, \dots, m_l, \dots, m_n) \\ &= f(a_l) \circ (f(a_k) \circ R(m_1, \dots, m_k, \dots, m_l, \dots, m_n)) \\ &= (f(a_l) \circ f(a_k)) \circ R(m_1, \dots, m_k, \dots, m_l, \dots, m_n) \end{aligned}$$

Отображения $f(a_k), f(a_l)$ являются гомоморфизмами Ω_2 -алгебры B . Следовательно, отображение $f(a_k) \circ f(a_l)$ является гомоморфизмом Ω_2 -алгебры B . Однако, не всякая Ω_1 -алгебра A имеет такой a (зависящий от a_k и a_l), что

$$f(a) = f(a_k) \circ f(a_l)$$

Если представление f транзитивно и для любых A -чисел a, b существует A -число c такое, что

$$(3.1.11) \quad f(c) = f(a) \circ f(b)$$

то равенство (3.1.11) определяет A -число c единственным образом. Следовательно, мы можем определить умножение

$$c_1 = a_1 * b_1$$

таким образом, что

$$(3.1.12) \quad f(a * b) = f(a) \circ f(b)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1.5. Пусть произведение

$$c_1 = a_1 * b_1$$

является операцией Ω_1 -алгебры A . Положим $\Omega = \Omega_1 \setminus \{*\}$. Для любой операции $\omega \in \Omega(p)$, умножение дистрибутивно относительно операция ω

$$(3.1.13) \quad a * (b_1 \dots b_n \omega) = (a * b_1) \dots (a * b_n) \omega$$

$$(3.1.14) \quad (b_1 \dots b_n \omega) * a = (b_1 * a) \dots (b_n * a) \omega$$

Ω_1 -алгебра A называется **мультипликативной Ω -группой**.^{3.1} □

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1.6. Пусть A, B - мультипликативные Ω -группы. Отображение

$$f : A \rightarrow B$$

называется **мультипликативным**, если

$$f(a * b) = f(a) \circ f(b)$$

□

ТЕОРЕМА 3.1.7. Однотранзитивное представление мультипликативной Ω -группы является мультипликативным отображением.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение является следствием равенства (3.1.12) и определения 3.1.6. □

Однако утверждение теоремы 3.1.7 недостаточно, чтобы доказать равенство выражений (3.1.9) и (3.1.10).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1.8. Если

$$(3.1.15) \quad a * b = b * a$$

то мультипликативная Ω -группа называется **абелевой**. □

ТЕОРЕМА 3.1.9. Пусть

$$f : A \longrightarrow M$$

эффективное представление абелевой мультипликативной Ω -группы A . Тогда

$$(3.1.16) \quad \begin{aligned} & f(a_k) \circ (f(a_l) \circ R(m_1, \dots, m_k, \dots, m_l, \dots, m_n)) \\ &= f(a_l) \circ (f(a_k) \circ R(m_1, \dots, m_k, \dots, m_l, \dots, m_n)) \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенств (3.1.9), (3.1.10), (3.1.12), (3.1.15) следует, что

$$(3.1.17) \quad \begin{aligned} & f(a_k) \circ (f(a_l) \circ R(m_1, \dots, m_k, \dots, m_l, \dots, m_n)) \\ &= (f(a_k) \circ f(a_l)) \circ R(m_1, \dots, m_k, \dots, m_l, \dots, m_n) \\ &= f(a_k * a_l) \circ R(m_1, \dots, m_k, \dots, m_l, \dots, m_n) \\ &= f(a_l * a_k) \circ R(m_1, \dots, m_k, \dots, m_l, \dots, m_n) \\ &= (f(a_l) \circ f(a_k)) \circ R(m_1, \dots, m_k, \dots, m_l, \dots, m_n) \\ &= f(a_l) \circ (f(a_k) \circ R(m_1, \dots, m_k, \dots, m_l, \dots, m_n)) \end{aligned}$$

^{3.1} Определение мультипликативной Ω -группы похоже на определение [6]-2.1.3 Ω -группы. Однако, Ω -группа предполагает сложение как групповую операцию. Для нас существенно, что групповая операция мультипликативной Ω -группы является произведением. Кроме того, операция ω Ω -группы дистрибутивна относительно сложения. В мультипликативной Ω -группе, произведение дистрибутивно относительно операции ω .

Равенство (3.1.16) является следствием равенства (3.1.17). \square

ТЕОРЕМА 3.1.10. Пусть A - абелевая мультипликативная Ω -группа. Пусть R - приведенный полиморфизм эффективных представлений f_1, \dots, f_n в эффективное представление f . Тогда для любых $k, l, k = 1, \dots, n, l = 1, \dots, n$,

$$(3.1.18) \quad \begin{aligned} & R(m_1, \dots, f_k(a) \circ m_k, \dots, m_l, \dots, m_n) \\ &= R(m_1, \dots, m_k, \dots, f_l(a) \circ m_l, \dots, m_n) \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенство (3.1.18) непосредственно следует из равенства (3.1.4). \square

ТЕОРЕМА 3.1.11. Пусть

$$A \multimap B_1 \quad A \multimap B_2 \quad A \multimap B$$

эффективные представления абелевой мультипликативной Ω_1 -группы A в Ω_2 -алгебрах B_1, B_2, B . Допустим Ω_2 -алгебра имеет 2 операции, а именно $\omega_1 \in \Omega_2(p), \omega_2 \in \Omega_2(q)$. Необходимым условием существования приведенного полиморфизма

$$R : B_1 \times B_2 \rightarrow B$$

является равенство

$$(3.1.19) \quad (a_{1.1} \dots a_{1.q} \omega_2) \dots (a_{p.1} \dots a_{p.q} \omega_2) \omega_1 = (a_{1.1} \dots a_{p.1} \omega_1) \dots (a_{1.q} \dots a_{p.q} \omega_1) \omega_2$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a_1, \dots, a_p \in B_1, b_1, \dots, b_q \in B_2$. Согласно равенству (3.1.5), выражение

$$(3.1.20) \quad R(a_1 \dots a_p \omega_1, b_1 \dots b_q \omega_2)$$

может иметь 2 значения

$$(3.1.21) \quad \begin{aligned} & R(a_1 \dots a_p \omega_1, b_1 \dots b_q \omega_2) \\ &= R(a_1, b_1 \dots b_q \omega_2) \dots R(a_p, b_1 \dots b_q \omega_2) \omega_1 \\ &= (R(a_1, b_1) \dots R(a_1, b_q) \omega_2) \dots (R(a_p, b_1) \dots R(a_p, b_q) \omega_2) \omega_1 \end{aligned}$$

$$(3.1.22) \quad \begin{aligned} & R(a_1 \dots a_p \omega_1, b_1 \dots b_q \omega_2) \\ &= R(a_1 \dots a_p \omega_1, b_1) \dots R(a_1 \dots a_p \omega_1, b_q) \omega_2 \\ &= (R(a_1, b_1) \dots R(a_p, b_1) \omega_1) \dots (R(a_1, b_q) \dots R(a_p, b_q) \omega_1) \omega_2 \end{aligned}$$

Из равенств (3.1.21), (3.1.22) следует, что

$$(3.1.23) \quad \begin{aligned} & (R(a_1, b_1) \dots R(a_1, b_q) \omega_2) \dots (R(a_p, b_1) \dots R(a_p, b_q) \omega_2) \omega_1 \\ &= (R(a_1, b_1) \dots R(a_p, b_1) \omega_1) \dots (R(a_1, b_q) \dots R(a_p, b_q) \omega_1) \omega_2 \end{aligned}$$

Следовательно, выражение (3.1.20) определено корректно тогда и только тогда, когда равенство (3.1.23) верно. Положим

$$(3.1.24) \quad a_{i.j} = R(a_i, b_j) \in A$$

Равенство (3.1.19) является следствием равенств (3.1.23), (3.1.24). \square

ТЕОРЕМА 3.1.12. Существует приведенный полиморфизм эффективного представления абелевой мультипликативной Ω -группы в абелевой группе.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку операция сложения в абелевой группе коммутативна и ассоциативна, то теорема является следствием теоремы 3.1.11. \square

ТЕОРЕМА 3.1.13. *Не существует приведенный полиморфизм эффективно-го представления абелевой мультипликативной Ω -группы в кольцо.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В кольце определены две операции: сложение, которое коммутативно и ассоциативно, и произведение, которое дистрибутивно относительно сложения. Согласно теореме 3.1.11, если существует полиморфизм эффективного представления в кольцо, то сложение и произведение должны удовлетворять равенству

$$(3.1.25) \quad a_{1.1}a_{2.1} + a_{1.2}a_{2.2} = (a_{1.1} + a_{1.2})(a_{2.1} + a_{2.2})$$

Однако правая часть равенства (3.1.25) имеет вид

$$\begin{aligned} (a_{1.1} + a_{1.2})(a_{2.1} + a_{2.2}) &= (a_{1.1} + a_{1.2})a_{2.1} + (a_{1.1} + a_{1.2})a_{2.2} \\ &= a_{1.1}a_{2.1} + a_{1.2}a_{2.1} + a_{1.1}a_{2.2} + a_{1.2}a_{2.2} \end{aligned}$$

Следовательно, равенство (3.1.25) не верно. \square

ВОПРОС 3.1.14. *Возможно, что полиморфизм представлений существует только для эффективного представления в Абелева группа. Однако это утверждение пока не доказано.* \square

3.2. Конгруэнция

ТЕОРЕМА 3.2.1. *Пусть N - отношение эквивалентности на множестве A . Рассмотрим категорию \mathcal{A} объектами которой являются отображения^{3.2}*

$$f_1 : A \rightarrow S_1 \quad \ker f_1 \supseteq N$$

$$f_2 : A \rightarrow S_2 \quad \ker f_2 \supseteq N$$

Мы определим морфизм $f_1 \rightarrow f_2$ как отображение $h : S_1 \rightarrow S_2$, для которого коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & S_1 & \\ f_1 \nearrow & & \downarrow h \\ A & & S_2 \\ f_2 \searrow & & \end{array}$$

Отображение

$$\text{nat } N : A \rightarrow A/N$$

является универсально отталкивающим в категории \mathcal{A} .^{3.3}

^{3.2}Утверждение леммы аналогично утверждению на с. [1]-94.

^{3.3}Определение универсального объекта смотри в определении на с. [1]-47.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} & A/N & \\ j=\text{nat } N \nearrow & \downarrow h & \\ A & & S \\ & \searrow f & \end{array}$$

$$(3.2.1) \quad \ker f \supseteq N$$

Из утверждения (3.2.1) и равенства

$$j(a_1) = j(a_2)$$

следует

$$f(a_1) = f(a_2)$$

Следовательно, мы можем однозначно определить отображение h с помощью равенства

$$h(j(b)) = f(b)$$

□

ТЕОРЕМА 3.2.2. Пусть

$$f : A \multimap B$$

представление Ω_1 -алгебры A в Ω_2 -алгебре B . Пусть N - такая конгруэнция^{3.4} на Ω_2 -алгебре B , что любое преобразование $h \in {}^*B$ согласованно с конгруэнцией N . Существует представление

$$f_1 : A \multimap B/N$$

Ω_1 -алгебры A в Ω_2 -алгебре B/N и отображение

$$\text{nat } N : B \rightarrow B/N$$

является приведенным морфизмом представления f в представление f_1

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{j} & B/N \\ & \nwarrow f \quad \nearrow f_1 & \\ & A & \end{array} \quad j = \text{nat } N$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Любой элемент множества B/N мы можем представить в виде $j(a)$, $a \in B$.

Согласно теореме [9]-II.3.5, мы можем определить единственную структуру Ω_2 -алгебры на множестве B/N . Если $\omega \in \Omega_2(p)$, то мы определим операцию ω на множестве B/N согласно равенству (3) на странице [9]-73

$$(3.2.2) \quad j(b_1) \dots j(b_p) \omega = j(b_1 \dots b_p \omega)$$

Также как в доказательстве теоремы [4]-2.2.16, мы можем определить представление

$$f_1 : A \multimap B/N$$

^{3.4}Смотри определение конгруэнции на с. [9]-71.

с помощью равенства

$$(3.2.3) \quad f_1(a) \circ j(b) = j(f(a) \circ b)$$

Равенство (3.2.3) можно представить с помощью диаграммы

$$(3.2.4) \quad \begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{j} & B/N \\ f(a) \uparrow & & \uparrow f_1(a) \\ B & \xrightarrow{j} & B/N \end{array}$$

Пусть $\omega \in \Omega_2(p)$. Так как отображения $f(a)$ и j являются гомоморфизмами Ω_2 -алгебры, то

$$(3.2.5) \quad \begin{aligned} f_1(a) \circ (j(b_1) \dots j(b_p)\omega) &= f_1(a) \circ j(b_1 \dots b_p\omega) \\ &= j(f(a) \circ (b_1 \dots b_p\omega)) \\ &= j((f(a) \circ b_1) \dots (f(a) \circ b_p)\omega) \\ &= j(f(a) \circ b_1) \dots j(f(a) \circ b_p)\omega \\ &= (f_1(a) \circ j(b_1)) \dots (f_1(a) \circ j(b_p))\omega \end{aligned}$$

Из равенства (3.2.5) следует, что отображение $f_1(a)$ является гомоморфизмом Ω_2 -алгебры. Из равенства (3.2.3) и [4]-2.3.2, следует, что отображение j является приведенным морфизмом представления f в представление f_1 . \square

ТЕОРЕМА 3.2.3. Пусть

$$f : A \twoheadrightarrow B$$

представление Ω_1 -алгебры A в Ω_2 -алгебре B . Пусть N - такая конгруэнция на Ω_2 -алгебре B , что любое преобразование $h \in {}^*B$ согласованно с конгруэнцией N . Рассмотрим категорию \mathcal{A} объектами которой являются приведенные морфизмы представлений^{3.5}

$$R_1 : B \rightarrow S_1 \quad \ker R_1 \supseteq N$$

$$R_2 : B \rightarrow S_2 \quad \ker R_2 \supseteq N$$

где S_1, S_2 - Ω_2 -алгебры и

$$g_1 : A \twoheadrightarrow S_1 \quad g_2 : A \twoheadrightarrow S_2$$

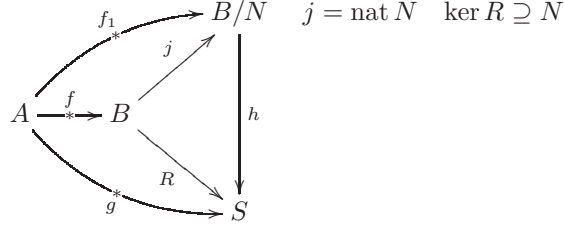
представления Ω_1 -алгебры A . Мы определим морфизм $R_1 \rightarrow R_2$ как приведенный морфизм представлений $h : S_1 \rightarrow S_2$, для которого коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & & S_1 \\ & \nearrow g_1 & \\ A & \xrightarrow{f} & B \\ & \searrow g_2 & \\ & & S_2 \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ R_1 \\ \\ R_2 \\ \\ h \end{array}$$

^{3.5}Утверждение леммы аналогично утверждению на с. [1]-94.

Приведенный морфизм $\text{nat } N$ представления f в представление f_1 (теорема 3.2.2) является универсально отталкивающим в категории \mathcal{A} .^{3.6}

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование и единственность отображения h , для которого коммутативна диаграмма



следует из теоремы 3.2.1. Следовательно, мы можем однозначно определить отображение h с помощью равенства

$$(3.2.6) \quad h(j(b)) = R(b)$$

Пусть $\omega \in \Omega_2(p)$. Так как отображения R и j являются гомоморфизмами Ω_2 -алгебры, то

$$\begin{aligned}
 h(j(b_1) \dots j(b_p)\omega) &= h(j(b_1 \dots b_p\omega)) \\
 &= R(b_1 \dots b_p\omega) \\
 &= R(b_1) \dots R(b_p)\omega \\
 &= h(j(b_1)) \dots h(j(b_p))\omega
 \end{aligned}
 \quad (3.2.7)$$

Из равенства (3.2.7) следует, что отображение h является гомоморфизмом Ω_2 -алгебры.

Так как отображение R является приведенным морфизмом представления f в представление g , то верно равенство

$$(3.2.8) \quad g(a)(R(b)) = R(f(a)(b))$$

Из равенства (3.2.6) следует

$$(3.2.9) \quad g(a)(h(j(b))) = g(a)(R(b))$$

Из равенств (3.2.8), (3.2.9) следует

$$(3.2.10) \quad g(a)(h(j(b))) = R(f(a)(b))$$

Из равенств (3.2.6), (3.2.10) следует

$$(3.2.11) \quad g(a)(h(j(b))) = h(j(f(a)(b)))$$

Из равенств (3.2.3), (3.2.11) следует

$$(3.2.12) \quad g(a)(h(j(b))) = h(f_1(a)(j(b)))$$

Из равенства (3.2.12) следует, что отображение h является приведенным морфизмом представления f_1 в представление g . \square

^{3.6}Определение универсального объекта смотри в определении на с. [1]-47.

3.3. Тензорное произведение представлений

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3.1. Пусть A является абелевой мультипликативной Ω_1 -группой. Пусть B_1, \dots, B_n - Ω_2 -алгебры.^{3.7} Пусть для любого $k, k = 1, \dots, n$,

$$f_k : A \multimap B_k$$

эффективное представление мультипликативной Ω_1 -группы A в Ω_2 -алгебре B_k . Рассмотрим категорию \mathcal{A} объектами которой являются приведенные полиморфизмы представлений f_1, \dots, f_n

$$r_1 : B_1 \times \dots \times B_n \longrightarrow S_1 \quad r_2 : B_1 \times \dots \times B_n \longrightarrow S_2$$

где S_1, S_2 - Ω_2 -алгебры и

$$g_1 : A \multimap S_1 \quad g_2 : A \multimap S_2$$

эффективные представления мультипликативной Ω_1 -группы A . Мы определим морфизм $R_1 \rightarrow R_2$ как приведенный морфизм представлений $h : S_1 \rightarrow S_2$, для которого коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & & S_1 \\ & \nearrow r_1 & \downarrow h \\ B_1 \times \dots \times B_n & & \\ & \searrow r_2 & \downarrow \\ & & S_2 \end{array}$$

Универсальный объект $B_1 \otimes \dots \otimes B_n$ категории \mathcal{A} называется **тензорным произведением представлений** B_1, \dots, B_n . \square

ТЕОРЕМА 3.3.2. Если тензорное произведение эффективных представлений существует, то тензорное произведение определено однозначно с точностью до изоморфизма представлений.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть A является абелевой мультипликативной Ω_1 -группой. Пусть B_1, \dots, B_n - Ω_2 -алгебры. Пусть для любого $k, k = 1, \dots, n$,

$$f_k : A \multimap B_k$$

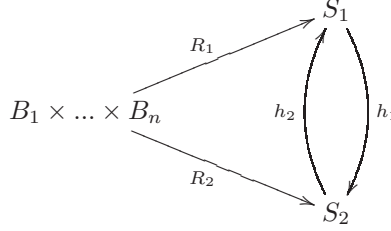
эффективное представление мультипликативной Ω_1 -группы A в Ω_2 -алгебре B_k . Пусть эффективные представления

$$g_1 : A \multimap S_1 \quad g_2 : A \multimap S_2$$

^{3.7}Я определяю тензорное произведение представлений универсальной алгебры по аналогии с определением в [1], с. 456 - 458.

являются тензорным произведением представлений B_1, \dots, B_n . Из коммутативности диаграммы

(3.3.1)



следует, что

$$\begin{aligned}
 (3.3.2) \quad R_1 &= h_2 \circ h_1 \circ R_1 \\
 R_2 &= h_1 \circ h_2 \circ R_2
 \end{aligned}$$

Из равенств (3.3.2) следует, что морфизмы представления $h_1 \circ h_2, h_2 \circ h_1$ являются тождественными отображениями. Следовательно, морфизмы представления h_1, h_2 являются изоморфизмами. \square

СОГЛАШЕНИЕ 3.3.3. Алгебры S_1, S_2 могут быть различными множествами. Однако они неразличимы для нас, если мы рассматриваем их как изоморфные представления. В этом случае мы будем писать $S_1 = S_2$. \square

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3.4. Тензорное произведение

$$B^{\otimes n} = B_1 \otimes \dots \otimes B_n \quad B_1 = \dots = B_n = B$$

называется **тензорной степенью** представления B . \square

ТЕОРЕМА 3.3.5. Если существует полиморфизм представлений, то тензорное произведение представлений существует.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$f : A \twoheadrightarrow M$$

представление Ω_1 -алгебры A , порождённое декартовым произведением $B_1 \times \dots \times B_n$ множеств B_1, \dots, B_n .^{3.8} Инъекция

$$i : B_1 \times \dots \times B_n \longrightarrow M$$

определена по правилу^{3.9}

$$(3.3.3) \quad i \circ (b_1, \dots, b_n) = (b_1, \dots, b_n)$$

Пусть N - отношение эквивалентности, порождённое равенствами^{3.10}

$$(3.3.4) \quad (b_1, \dots, b_{i-1} \dots b_{i-p} \omega, \dots, b_n) = (b_1, \dots, b_{i-1}, \dots, b_n) \dots (b_1, \dots, b_{i-p}, \dots, b_n) \omega$$

$$(3.3.5) \quad (b_1, \dots, f_i(a) \circ b_i, \dots, b_n) = f(a) \circ (b_1, \dots, b_i, \dots, b_n)$$

^{3.8}Согласно теоремам 2.1.3, 2.3.2, множество, порождённое приведенным декартовым произведением представлений B_1, \dots, B_n совпадает с декартовым произведением $B_1 \times \dots \times B_n$ множеств B_1, \dots, B_n . В этом месте доказательства нас не интересует алгебраическая структура на множестве $B_1 \times \dots \times B_n$.

^{3.9}Равенство (3.3.3) утверждает, что мы отождествляем базис представления M с множеством $B_1 \times \dots \times B_n$.

^{3.10} Я рассматриваю формирование элементов представления из элементов базиса согласно теореме [4]-2.6.4. Теорема 3.3.11 требует выполнения условий (3.3.4), (3.3.5).

$$b_k \in B_k \quad k = 1, \dots, n \quad b_{i \cdot 1}, \dots, b_{i \cdot p} \in B_i \quad \omega \in \Omega_2(p) \quad a \in A$$

ЛЕММА 3.3.6. Пусть $\omega \in \Omega_2(p)$. Тогда

$$(3.3.6) \quad \begin{aligned} & f(c) \circ (b_1, \dots, b_{i \cdot 1} \dots b_{i \cdot p} \omega, \dots, b_n) \\ &= f(c) \circ ((b_1, \dots, b_{i \cdot 1}, \dots, b_n) \dots (b_1, \dots, b_{i \cdot p}, \dots, b_n) \omega) \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенства (3.3.5) следует

$$(3.3.7) \quad f(c) \circ (b_1, \dots, b_{i \cdot 1} \dots b_{i \cdot p} \omega, \dots, b_n) = (b_1, \dots, f_i(c) \circ (b_{i \cdot 1} \dots b_{i \cdot p} \omega), \dots, b_n)$$

Так как $f_i(c)$ - эндоморфизм Ω_2 -алгебры B_i , то из равенства (3.3.7) следует

$$(3.3.8) \quad f(c) \circ (b_1, \dots, b_{i \cdot 1} \dots b_{i \cdot p} \omega, \dots, b_n) = (b_1, \dots, (f_i(c) \circ b_{i \cdot 1}) \dots (f_i(c) \circ b_{i \cdot p}) \omega, \dots, b_n)$$

Из равенств (3.3.8), (3.3.4) следует

$$(3.3.9) \quad \begin{aligned} & f(c) \circ (b_1, \dots, b_{i \cdot 1} \dots b_{i \cdot p} \omega, \dots, b_n) \\ &= (b_1, \dots, f_i(c) \circ b_{i \cdot 1}, \dots, b_n) \dots (b_1, \dots, f_i(c) \circ b_{i \cdot p}, \dots, b_n) \omega \end{aligned}$$

Из равенств (3.3.9), (3.3.5) следует

$$(3.3.10) \quad \begin{aligned} & f(c) \circ (b_1, \dots, b_{i \cdot 1} \dots b_{i \cdot p} \omega, \dots, b_n) \\ &= (f(c) \circ (b_1, \dots, b_{i \cdot 1}, \dots, b_n)) \dots (f(c) \circ (b_1, \dots, b_{i \cdot p}, \dots, b_n)) \omega \end{aligned}$$

Так как $f(c)$ - эндоморфизм Ω_2 -алгебры B , то равенство (3.3.6) следует из равенства (3.3.10). \odot

ЛЕММА 3.3.7.

$$(3.3.11) \quad f(c) \circ (b_1, \dots, f_i(a) \circ b_i, \dots, b_n) = f(c) \circ (f(a) \circ (b_1, \dots, b_i, \dots, b_n))$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенства (3.3.5) следует, что

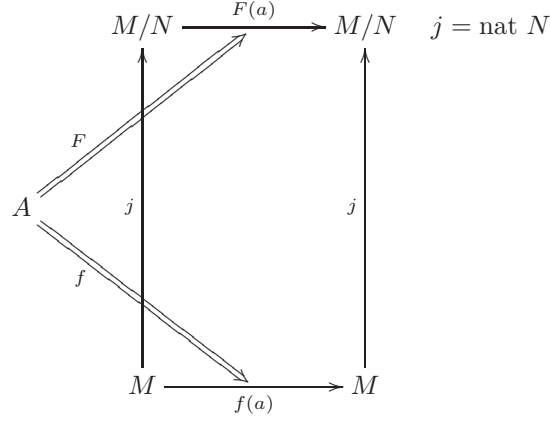
$$(3.3.12) \quad \begin{aligned} & f(c) \circ (b_1, \dots, f_i(a) \circ b_i, \dots, b_n) = (b_1, \dots, f_i(c) \circ (f_i(a) \circ b_i), \dots, b_n) \\ &= (b_1, \dots, (f_i(c) \circ f_i(a)) \circ b_i, \dots, b_n) \\ &= (f(c) \circ f(a)) \circ (b_1, \dots, b_i, \dots, b_n) \\ &= f(c) \circ (f(a) \circ (b_1, \dots, b_i, \dots, b_n)) \end{aligned}$$

Равенство (3.3.11) следует из равенства (3.3.12). \odot

ЛЕММА 3.3.8. Для любого $c \in A$ эндоморфизм $f(c)$ Ω_2 -алгебры M согласовано с эквивалентностью N .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение леммы следует из лемм 3.3.6, 3.3.7 и определения [4]-2.2.14. \odot

Из леммы 3.3.8 и теоремы [7]-3.2.15, следует, что на множестве ${}^*M/N$ определена Ω_1 -алгебра. Рассмотрим диаграмму



Согласно лемме 3.3.8, из условия

$$j \circ b_1 = j \circ b_2$$

следует

$$j \circ (f(a) \circ b_1) = j \circ (f(a) \circ b_2)$$

Следовательно, преобразование $F(a)$ определено корректно и

$$(3.3.13) \quad F(a) \circ j = j \circ f(a)$$

Если $\omega \in \Omega_1(p)$, то мы положим

$$(F(a_1) \dots F(a_p) \omega) \circ (J \circ b) = J \circ ((f(a_1) \dots f(a_p) \omega) \circ b)$$

Следовательно, отображение F является представлением Ω_1 -алгебры A . Из (3.3.13) следует, что j является приведенным морфизмом представлений f и F .

Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$(3.3.14) \quad \begin{array}{ccc} & & M/N \\ & \nearrow g_1 & \\ B_1 \times \dots \times B_n & \xrightarrow{i} & M \\ & \searrow j & \end{array}$$

Из коммутативности диаграммы (3.3.14) и равенства (3.3.3) следует, что

$$(3.3.15) \quad g_1 \circ (b_1, \dots, b_n) = j \circ (b_1, \dots, b_n)$$

Из равенств (3.3.3), (3.3.4), (3.3.5) следует

$$(3.3.16) \quad \begin{aligned} & g_1 \circ (b_1, \dots, b_{i-1} \dots b_{i,p} \omega, \dots, b_n) \\ &= (g_1 \circ (b_1, \dots, b_{i-1}, \dots, b_n)) \dots (g_1 \circ (b_1, \dots, b_{i,p}, \dots, b_n)) \omega \end{aligned}$$

$$(3.3.17) \quad g_1 \circ (b_1, \dots, f_i(a) \circ b_i, \dots, b_n) = f(a) \circ (g_1 \circ (b_1, \dots, b_i, \dots, b_n))$$

Из равенств (3.3.16) и (3.3.17) следует, что отображение g_1 является приведенным полиморфизмом представлений f_1, \dots, f_n .

Поскольку $B_1 \times \dots \times B_n$ - базис представления M Ω_1 -алгебры A , то, согласно теореме [4]-2.7.7, для любого представления

$$A \twoheadrightarrow V$$

и любого приведенного полиморфизма

$$g_2 : B_1 \times \dots \times B_n \longrightarrow V$$

существует единственный морфизм представлений $k : M \rightarrow V$, для которого коммутативна следующая диаграмма

$$(3.3.18) \quad \begin{array}{ccc} B_1 \times \dots \times B_n & \xrightarrow{i} & M \\ & \searrow g_2 & \downarrow k \\ & & V \end{array}$$

Так как g_2 - приведенный полиморфизм, то $\ker k \supseteq N$.

Согласно теореме 3.2.3 отображение j универсально в категории морфизмов представления f , ядро которых содержит N . Следовательно, определён морфизм представлений

$$h : M/N \rightarrow V$$

для которого коммутативна диаграмма

$$(3.3.19) \quad \begin{array}{ccc} & M/N & \\ & \downarrow h & \\ M & \xrightarrow{j} & M/N \\ & \searrow k & \downarrow h \\ & & V \end{array}$$

Объединяя диаграммы (3.3.14), (3.3.18), (3.3.19), получим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} & & & M/N & \\ & & g_1 \nearrow & \downarrow h & \\ B_1 \times \dots \times B_n & \xrightarrow{i} & M & \xrightarrow{j} & M/N \\ & \searrow g_2 & \downarrow k & & \\ & & V & & \end{array}$$

Так как $\text{Im } g_1$ порождает M/N , то отображение h однозначно определено. \square

Согласно доказательству теоремы 3.3.5

$$B_1 \otimes \dots \otimes B_n = M/N$$

Для $d_i \in A_i$ будем записывать

$$(3.3.20) \quad j \circ (d_1, \dots, d_n) = d_1 \otimes \dots \otimes d_n$$

Из равенств (3.3.15), (3.3.20) следует, что

$$(3.3.21) \quad g_1 \circ (d_1, \dots, d_n) = d_1 \otimes \dots \otimes d_n$$

ТЕОРЕМА 3.3.9. *Отображение*

$$(x_1, \dots, x_n) \in B_1 \times \dots \times B_n \rightarrow x_1 \otimes \dots \otimes x_n \in B_1 \otimes \dots \otimes B_n$$

является полиморфизмом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Теорема является следствием определений 3.1.3, 3.3.1. \square

ТЕОРЕМА 3.3.10. *Пусть B_1, \dots, B_n - Ω_2 -алгебры. Пусть*

$$f : B_1 \times \dots \times B_n \rightarrow B_1 \otimes \dots \otimes B_n$$

приведенный полиморфизм, определённый равенством

$$(3.3.22) \quad f \circ (b_1, \dots, b_n) = b_1 \otimes \dots \otimes b_n$$

Пусть

$$g : B_1 \times \dots \times B_n \rightarrow V$$

приведенный полиморфизм в Ω_2 -алгебру V . Существует морфизм представлений

$$h : B_1 \otimes \dots \otimes B_n \rightarrow V$$

такой, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & B_1 \otimes \dots \otimes B_n & \\ f \nearrow & & \downarrow h \\ B_1 \times \dots \times B_n & & V \\ g \searrow & & \end{array}$$

коммутативна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенство (3.3.22) следует из равенств (3.3.3) и (3.3.20). Существование отображения h следует из определения 3.3.1 и построений, выполненных при доказательстве теоремы 3.3.5. \square

ТЕОРЕМА 3.3.11. *Пусть*

$$b_k \in B_k \quad k = 1, \dots, n \quad b_{i,1}, \dots, b_{i,p} \in B_i \quad \omega \in \Omega_2(p) \quad a \in A$$

Тензорное произведение дистрибутивно относительно операции ω

$$(3.3.23) \quad \begin{aligned} & b_1 \otimes \dots \otimes (b_{i,1} \dots b_{i,p} \omega) \otimes \dots \otimes b_n \\ &= (b_1 \otimes \dots \otimes b_{i,1} \otimes \dots \otimes b_n) \dots (b_1 \otimes \dots \otimes b_{i,p} \otimes \dots \otimes b_n) \omega \end{aligned}$$

Представление мультипликативной Ω_1 -группы A в тензорном произведении определено равенством

$$(3.3.24) \quad b_1 \otimes \dots \otimes (f_i(a) \circ b_i) \otimes \dots \otimes b_n = f(a) \circ (b_1 \otimes \dots \otimes b_i \otimes \dots \otimes b_n)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенство (3.3.23) является следствием равенства (3.3.16) и определения (3.3.21). Равенство (3.3.24) является следствием равенства (3.3.17) и определения (3.3.21). \square

3.4. Ассоциативность тензорного произведения

Пусть A является мультипликативной Ω_1 -группой. Пусть B_1, B_2, B_3 - Ω_2 -алгебры. Пусть для $k = 1, 2, 3$

$$f_k : A \dashrightarrow B_k$$

эффективное представление мультипликативной Ω_1 -группы A в Ω_2 -алгебре B_k .

ЛЕММА 3.4.1. Для заданного значения $x_3 \in B_3$, отображение

$$(3.4.1) \quad h_{12} : (B_1 \otimes B_2) \times B_3 \rightarrow B_1 \otimes B_2 \otimes B_3$$

определённое равенством

$$(3.4.2) \quad h_{12}(x_1 \otimes x_2, x_3) = x_1 \otimes x_2 \otimes x_3$$

является приведенным морфизмом представления $B_1 \otimes B_2$ в представление $B_1 \otimes B_2 \otimes B_3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 3.3.9, для заданного значения $x_3 \in B_3$, отображение

$$(3.4.3) \quad (x_1, x_2, x_3) \in B_1 \times B_2 \times B_3 \rightarrow x_1 \otimes x_2 \otimes x_3 \in B_1 \otimes B_2 \otimes B_3$$

является полиморфизмом по переменным $x_1 \in B_1, x_2 \in B_2$. Следовательно, для заданного значения $x_3 \in B_3$, лемма является следствием теоремы 3.3.10. \square

ЛЕММА 3.4.2. Для заданного значения $x_{12} \in B_1 \otimes B_2$ отображение h_{12} является приведенным морфизмом представления B_3 в представление $B_1 \otimes B_2 \otimes B_3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 3.3.9 и равенству (3.3.21), для заданного значения $x_1 \in B_1, x_2 \in B_2$, отображение

$$(3.4.4) \quad (x_1 \otimes x_2, x_3) \in (B_1 \otimes B_2) \times B_3 \rightarrow x_1 \otimes x_2 \otimes x_3 \in B_1 \otimes B_2 \otimes B_3$$

является морфизмом по переменной $x_3 \in B_3$. Следовательно, теорема является следствием теорем 3.1.10, 3.1.11. \square

ЛЕММА 3.4.3. Существует приведенный морфизм представлений

$$h : (B_1 \otimes B_2) \otimes B_3 \rightarrow B_1 \otimes B_2 \otimes B_3$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно леммам 3.4.1, 3.4.2 и определению 3.1.3, отображение h_{12} является приведенным полиморфизмом представлений. Утверждение леммы является следствием теоремы 3.3.10. \square

ЛЕММА 3.4.4. Существует приведенный морфизм представлений

$$g : B_1 \otimes B_2 \otimes B_3 \rightarrow (B_1 \otimes B_2) \otimes B_3$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отображение

$$(x_1, x_2, x_3) \in B_1 \times B_2 \times B_3 \rightarrow (x_1 \otimes x_2) \otimes x_3 \in (B_1 \otimes B_2) \otimes B_3$$

является полиморфизмом по переменным $x_1 \in B_1, x_2 \in B_2, x_3 \in B_3$. Следовательно, лемма является следствием теоремы 3.3.10. \square

ТЕОРЕМА 3.4.5.

$$(3.4.5) \quad (B_1 \otimes B_2) \otimes B_3 = B_1 \otimes (B_2 \otimes B_3) = B_1 \otimes B_2 \otimes B_3$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 3.4.3, существует приведенный морфизм представлений

$$h : (B_1 \otimes B_2) \otimes B_3 \rightarrow B_1 \otimes B_2 \otimes B_3$$

Согласно лемме 3.4.4, существует приведенный морфизм представлений

$$g : B_1 \otimes B_2 \otimes B_3 \rightarrow (B_1 \otimes B_2) \otimes B_3$$

Следовательно, приведенные морфизмы представлений h, g являются изоморфизмами, откуда следует равенство

$$(3.4.6) \quad (B_1 \otimes B_2) \otimes B_3 = B_1 \otimes B_2 \otimes B_3$$

Аналогично мы можем доказать равенство

$$B_1 \otimes (B_2 \otimes B_3) = B_1 \otimes B_2 \otimes B_3$$

□

ЗАМЕЧАНИЕ 3.4.6. Очевидно, что структура Ω_2 -алгебр $(B_1 \otimes B_2) \otimes B_3$, $B_1 \otimes B_2 \otimes B_3$ слегка различна. Мы записываем равенство (3.4.6), опираясь на соглашение 3.3.3 и это позволяет нам говорить об ассоциативности тензорного произведения представлений. □

D -модуль

4.1. Модуль над коммутативным кольцом

ТЕОРЕМА 4.1.1. Пусть кольцо D имеет единицу e . Представление

$$f : D \dashrightarrow V$$

кольца D в абелевой группе A **эффективно** тогда и только тогда, когда из равенства $f(a) = 0$ следует $a = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сумма преобразований f и g абелевой группы определяется согласно правилу

$$(f + g)(a) = f(a) + g(a)$$

Поэтому, рассматривая представление кольца D в абелевой группе A , мы полагаем

$$f(a + b)(x) = f(a)(x) + f(b)(x)$$

Если $a, b \in R$ порождают одно и то же преобразование, то

$$(4.1.1) \quad f(a) \circ m = f(b) \circ m$$

для любого $m \in A$. Из равенства (4.1.1) следует, что $a - b$ порождает нулевое преобразование

$$f(a - b) \circ m = 0$$

Элемент $e + a - b$ порождает тождественное преобразование. Следовательно, представление f эффективно тогда и только тогда, когда $a = b$. \square

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1.2. Эффективное представление коммутативного кольца D в абелевой группе V

$$(4.1.2) \quad f : D \dashrightarrow V \quad f(d) : v \rightarrow dv$$

называется **модулем над кольцом D или D -модулем**. \square

ТЕОРЕМА 4.1.3. Элементы D -модуля V удовлетворяют соотношениям

- **закону ассоциативности**

$$(4.1.3) \quad (ab)m = a(bm)$$

- **закону дистрибутивности**

$$(4.1.4) \quad a(m + n) = am + an$$

$$(4.1.5) \quad (a + b)m = am + bm$$

- **закону унитарности**

$$(4.1.6) \quad 1m = m$$

для любых $a, b \in D, m, n \in V$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенство (4.1.4) следует из утверждения, что преобразование a является эндоморфизмом абелевой группы. Равенство (4.1.5) следует из утверждения, что представление (4.1.2) является гомоморфизмом аддитивной группы кольца D . Равенства (4.1.3) и (4.1.6) следуют из утверждения, что представление (4.1.2) является левосторонним представлением мультипликативной группы кольца D . \square

ТЕОРЕМА 4.1.4. Множество векторов, порождённое множеством векторов $v = (v_i \in V, i \in I)$ имеет вид

$$(4.1.7) \quad J(v) = \left\{ w : w = \sum_{i \in I} c^i v_i, c^i \in D \right\}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы докажем теорему по индукции, опираясь на теорему [4]-2.6.4.

Пусть $k = 0$. Согласно теореме [4]-2.6.4, $X_0 = v$. Для произвольного $v_k \in v$, положим $c^i = \delta_k^i$. Тогда

$$(4.1.8) \quad v_k = \sum_{i \in I} c^i v_i$$

$v_k \in J(v)$ следует из (4.1.7), (4.1.8).

Пусть $X_{k-1} \subseteq J(v)$.

- Пусть $w_1, w_2 \in X_{k-1}$. Так как V является абелевой группой, то согласно утверждению [4]-2.6.4.3, $w_1 + w_2 \in X_k$. Согласно утверждениям [4]-(2.6.1), (4.1.7), существуют D -числа $c^i, d^i, i \in I$, такие, что

$$(4.1.9) \quad \begin{aligned} w_1 &= \sum_{i \in I} c^i v_i \\ w_2 &= \sum_{i \in I} d^i v_i \end{aligned}$$

Так как V является абелевой группой, то из равенства (4.1.9) следует, что

$$(4.1.10) \quad w_1 + w_2 = \sum_{i \in I} c^i v_i + \sum_{i \in I} d^i v_i = \sum_{i \in I} (c^i v_i + d^i v_i)$$

Равенство

$$(4.1.11) \quad w_1 + w_2 = \sum_{i \in I} (c^i + d^i) v_i$$

является следствием равенств (4.1.5), (4.1.10). Из равенства (4.1.11) следует, что $w_1 + w_2 \in J(v)$.

- Пусть $w \in X_{k-1}$. Согласно утверждению [4]-2.6.4.4, для любого D -числа a , $aw \in X_k$. Согласно утверждениям [4]-(2.6.1), (4.1.7), существуют D -числа $c^i, i \in I$, такие, что

$$(4.1.12) \quad w = \sum_{i \in I} c^i v_i$$

Из равенства (4.1.12) следует, что

$$(4.1.13) \quad aw = a \sum_{i \in I} c^i v_i = \sum_{i \in I} a(c^i v_i) = \sum_{i \in I} (ac^i) v_i$$

Из равенства (4.1.13) следует, что $aw \in J(v)$.

□

СОГЛАШЕНИЕ 4.1.5. Мы будем пользоваться соглашением Эйнштейна о сумме, в котором повторяющийся индекс (один сверху и один внизу) подразумевает сумму по повторяющемуся индексу. В этом случае предполагается известным множество индекса суммирования и знак суммы опускается

$$c^i v_i = \sum_{i \in I} c^i v_i$$

□

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1.6. Пусть $v = (v_i \in V, i \in I)$ - множество векторов. Выражение $c^i v_i$ называется **линейной комбинацией векторов v_i** . Вектор

$$w = c^i v_i$$

называется **вектором, линейно зависимым от векторов v_i** .

□

ТЕОРЕМА 4.1.7. Пусть D - поле. Если уравнение

$$(4.1.14) \quad c^i v_i = 0$$

предполагает существования индекса $i = j$ такого, что $c^j \neq 0$, то вектор v_j линейно зависит от остальных векторов v .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Теорема является следствием равенства

$$v_j = \sum_{i \in I \setminus \{j\}} \frac{c^i}{c^j} v_i$$

и определения 4.1.6.

□

Очевидно, что для любого множества векторов v_i ,

$$0 = c^i v_i \quad c^i = 0$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1.8. Векторы^{4.1} $e_i, i \in I$, D -модуля A **линейно независимы**, если $c = 0$ следует из уравнения

$$c^i e_i = 0$$

В противном случае, векторы $e_i, i \in I$, **линейно зависимы**.

□

ТЕОРЕМА 4.1.9. Пусть D - поле. Множество векторов $\bar{e} = (e_i, i \in I)$ является **базисом D -векторного пространства V** , если векторы e_i линейно независимы и любой вектор $v \in V$ линейно зависит от векторов e_i .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\bar{e} = (e_i, i \in I)$ - базис D -векторного пространства V . Согласно определению [4]-2.7.1 и теоремам [4]-2.6.4, 4.1.4, произвольный вектор $v \in V$ является линейной комбинацией векторов e_i

$$(4.1.15) \quad v = v^i e_i$$

Из равенства (4.1.15) следует, что множество векторов $v, e_i, i \in I$, не является линейно независимым.

^{4.1}Я следую определению в [1], с. 100.

Рассмотрим равенство

$$(4.1.16) \quad c^i e_i = 0$$

Согласно теореме 4.1.7, если

$$(4.1.17) \quad c^j \neq 0$$

то вектор e_j линейно зависит от остальных векторов e . Следовательно, множество векторов $e_i, i \in I \setminus \{j\}$, порождает D -векторное пространство V . Согласно определению [4]-2.7.1, утверждение (4.1.17) неверно. Согласно определению 4.1.8, векторы e_i линейно независимы. \square

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1.10. Множество векторов $\bar{e} = (e_i, i \in I)$ называется ^{4.2} **базисом D -модуля V** , если произвольный вектор $v \in V$ является линейной комбинацией векторов базиса и произвольный вектор базиса нельзя представить в виде линейной комбинации остальных векторов базиса. A - **свободный модуль над кольцом D** , если A имеет базис над кольцом D . ^{4.3} \square

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1.11. Пусть \bar{e} - базис D -модуля A , и A -число a имеет разложение

$$a = a^i e_i$$

относительно базиса \bar{e} . D -числа a^i называются **координатами A -числа a относительно базиса \bar{e}** . \square

4.2. Линейное отображение D -модуля

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2.1. Пусть A_1, A_2 - D -модули. Морфизм *представлений*

$$f : A_1 \rightarrow A_2$$

D -модуля A_1 в D -модуль A_2 называется **линейным отображением D -модуля A_1 в D -модуль A_2** . Обозначим $\mathcal{L}(D; A_1 \rightarrow A_2)$ множество линейных отображений D -модуля A_1 в D -модуль A_2 . \square

ТЕОРЕМА 4.2.2. *Линейное отображение*

$$f : A_1 \rightarrow A_2$$

D -модуля A_1 в D -модуль A_2 удовлетворяет равенствам ^{4.4}

$$(4.2.1) \quad f \circ (a + b) = f \circ a + f \circ b$$

$$(4.2.2) \quad f \circ (pa) = p(f \circ a)$$

$$a, b \in A_1 \quad p \in D$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения 4.2.1 и теоремы [7]-3.2.19 следует, что отображение f является гомоморфизмом абелевой группы A_1 в абелеву группу A_2 (равенство (4.2.1)). Равенство (4.2.2) следует из равенства [7]-(3.2.45). \square

^{4.2}Определение 4.1.10 является следствием теоремы [4]-2.7.2 и замечания [4]-2.7.3.

^{4.3}Я слеую определению в [1], с. 103.

^{4.4}В некоторых книгах (например, [1], с. 94) теорема 4.2.2 рассматривается как определение.

ТЕОРЕМА 4.2.3. Пусть A_1, A_2 - D -модули. Отображение

$$(4.2.3) \quad f + g : A_1 \rightarrow A_2 \quad f, g \in \mathcal{L}(D; A_1 \rightarrow A_2)$$

определённое равенством

$$(4.2.4) \quad (f + g) \circ x = f \circ x + g \circ x$$

называется **суммой отображений** f и g и является линейным отображением. Множество $\mathcal{L}(D; A_1; A_2)$ является абелевой группой относительно суммы отображений.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 4.2.2

$$(4.2.5) \quad f \circ (v + w) = f \circ v + f \circ w$$

$$(4.2.6) \quad f \circ (dv) = d(f \circ v)$$

$$(4.2.7) \quad g \circ (v + w) = g \circ v + g \circ w$$

$$(4.2.8) \quad g \circ (dv) = d(g \circ v)$$

Равенство

$$(4.2.9) \quad \begin{aligned} (f + g) \circ (v + w) &= f \circ (v + w) + g \circ (v + w) \\ &= f \circ v + f \circ w + g \circ v + g \circ w \\ &= (f + g) \circ v + (f + g) \circ w \end{aligned}$$

является следствием равенств (4.2.4), (4.2.5), (4.2.7). Равенство

$$(4.2.10) \quad \begin{aligned} (f + g) \circ (dv) &= f \circ (dv) + g \circ (dv) \\ &= df \circ v + dg \circ v \\ &= d(f \circ v + g \circ v) \\ &= d((f + g) \circ v) \end{aligned}$$

является следствием равенств (4.2.4), (4.2.6), (4.2.8). Из равенств (4.2.9), (4.2.10) и теоремы 4.2.2 следует, что отображение (4.2.3) является линейным отображением D -модулей.

Из равенства (4.2.4) следует, что отображение

$$0 : v \in A_1 \rightarrow 0 \in A_2$$

является нулём операции сложения

$$(0 + f) \circ v = 0 \circ v + f \circ v = f \circ v$$

Из равенства (4.2.4) следует, что отображение

$$-f : v \in A_1 \rightarrow -(f \circ v) \in A_2$$

является отображением, обратным отображению f

$$(f + (-f)) \circ v = f \circ v + (-f) \circ v = f \circ v - f \circ v = 0 = 0 \circ v$$

Из равенства

$$\begin{aligned} (f + g) \circ x &= f \circ x + g \circ x \\ &= g \circ x + f \circ x \\ &= (g + f) \circ x \end{aligned}$$

следует, что сумма отображений коммутативно. \square

ТЕОРЕМА 4.2.4. Пусть A_1, A_2 - D -модули. Отображение

$$(4.2.11) \quad df : A_1 \rightarrow A_2 \quad d \in D \quad f \in \mathcal{L}(D; A_1 \rightarrow A_2)$$

определённое равенством

$$(4.2.12) \quad (df) \circ x = d(f \circ x)$$

называется **произведением отображения f на скаляр d** и является линейным отображением. Представление

$$(4.2.13) \quad a : f \in \mathcal{L}(D; A_1 \rightarrow A_2) \rightarrow af \in \mathcal{L}(D; A_1 \rightarrow A_2)$$

кольца D в абелевой группе $\mathcal{L}(D; A_1 \rightarrow A_2)$ порождает структуру D -модуля.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 4.2.2

$$(4.2.14) \quad f \circ (v + w) = f \circ v + f \circ w$$

$$(4.2.15) \quad f \circ (dv) = d(f \circ v)$$

Равенство

$$(4.2.16) \quad \begin{aligned} (df) \circ (v + w) &= d(f \circ (v + w)) \\ &= d(f \circ v + f \circ w) = d(f \circ v) + d(f \circ w) \\ &= (df) \circ v + (df) \circ w \end{aligned}$$

является следствием равенств (4.2.12), (4.2.14). Равенство

$$(4.2.17) \quad \begin{aligned} (cf) \circ (dv) &= c(f \circ (dv)) = cd(f \circ v) = d(cf \circ v) \\ &= d((cf) \circ v) \end{aligned}$$

является следствием равенств (4.2.12), (4.2.15). Из равенств (4.2.16), (4.2.17) и теоремы 4.2.2 следует, что отображение (4.2.11) является линейным отображением D -модулей.

Равенство

$$(4.2.18) \quad (p + q)f = pf + qf$$

является следствием равенства

$$\begin{aligned} ((a + b)f) \circ v &= (a + b)(f \circ v) = a(f \circ v) + b(f \circ v) = (af) \circ v + (bf) \circ v \\ &= (af + bf) \circ v \end{aligned}$$

Равенство

$$(4.2.19) \quad p(qf) = (pq)f$$

является следствием равенства

$$((ab)f) \circ v = (ab)(f \circ v) = a(b(f \circ v)) = a((bf) \circ v) = (a(bf)) \circ v$$

Из равенств (4.2.18), (4.2.19), следует, что отображение (4.2.13) является представлением кольца D в абелевой группе $\mathcal{L}(D; A_1 \rightarrow A_2)$. Согласно определению 4.1.2 и теореме 4.2.3, абелевая группа $\mathcal{L}(D; A_1 \rightarrow A_2)$ является D -модулем. \square

ТЕОРЕМА 4.2.5. Пусть отображение

$$f : A_1 \rightarrow A_2$$

является линейным отображением D -модуля A_1 в D -модуль A_2 . Тогда

$$f \circ 0 = 0$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следствие равенства

$$f \circ (a + 0) = f \circ a + f \circ 0$$

□

4.3. Полилинейное отображение D -модуля

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.3.1. Пусть D - коммутативное кольцо. Приведенный полиморфизм D -модулей A_1, \dots, A_n в D -модуль S

$$f : A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow S$$

называется **полилинейным отображением** D -модулей A_1, \dots, A_n в D -модуль S . Обозначим $\mathcal{L}(D; A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow S)$ множество полилинейных отображений D -модулей A_1, \dots, A_n в D -модуль S . Обозначим $\mathcal{L}(D; A^n \rightarrow S)$ множество n -линейных отображений D -модуля A ($A_1 = \dots = A_n = A$) в D -модуль S . □

ТЕОРЕМА 4.3.2. Пусть D - коммутативное кольцо. Полилинейное отображение D -модулей A_1, \dots, A_n в D -модуль S

$$f : A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow S$$

удовлетворяет равенствам

$$f \circ (a_1, \dots, a_i + b_i, \dots, a_n) = f \circ (a_1, \dots, a_i, \dots, a_n) + f \circ (a_1, \dots, b_i, \dots, a_n)$$

$$f \circ (a_1, \dots, pa_i, \dots, a_n) = pf \circ (a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)$$

$$f \circ (a_1, \dots, a_i + b_i, \dots, a_n) = f \circ (a_1, \dots, a_i, \dots, a_n) + f \circ (a_1, \dots, b_i, \dots, a_n)$$

$$f \circ (a_1, \dots, pa_i, \dots, a_n) = pf \circ (a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)$$

$$1 \leq i \leq n \quad a_i, b_i \in A_i \quad p \in D$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Теорема является следствием определений 3.1.1, 4.2.1 и теоремы 4.2.2. □

ТЕОРЕМА 4.3.3. Пусть D - коммутативное кольцо. Пусть A_1, \dots, A_n, S - D -модули. Отображение

$$(4.3.1) \quad f + g : A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow S \quad f, g \in \mathcal{L}(D; A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow S)$$

определённое равенством

$$(4.3.2) \quad (f + g) \circ (a_1, \dots, a_n) = f \circ (a_1, \dots, a_n) + g \circ (a_1, \dots, a_n)$$

называется **суммой полилинейных отображений** f и g и является полилинейным отображением. Множество $\mathcal{L}(D; A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow S)$ является абелевой группой относительно суммы отображений.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 4.3.2

$$(4.3.3) \quad f \circ (a_1, \dots, a_i + b_i, \dots, a_n) = f \circ (a_1, \dots, a_i, \dots, a_n) + f \circ (a_1, \dots, b_i, \dots, a_n)$$

$$(4.3.4) \quad f \circ (a_1, \dots, pa_i, \dots, a_n) = pf \circ (a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)$$

$$(4.3.5) \quad g \circ (a_1, \dots, a_i + b_i, \dots, a_n) = g \circ (a_1, \dots, a_i, \dots, a_n) + g \circ (a_1, \dots, b_i, \dots, a_n)$$

$$(4.3.6) \quad g \circ (a_1, \dots, pa_i, \dots, a_n) = pg \circ (a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)$$

Равенство

$$(4.3.7) \quad \begin{aligned} & (f + g) \circ (x_1, \dots, x_i + y_i, \dots, x_n) \\ &= f \circ (x_1, \dots, x_i + y_i, \dots, x_n) + g \circ (x_1, \dots, x_i + y_i, \dots, x_n) \\ &= f \circ (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) + f \circ (x_1, \dots, y_i, \dots, x_n) \\ &+ g \circ (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) + g \circ (x_1, \dots, y_i, \dots, x_n) \\ &= (f + g) \circ (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) + (f + g) \circ (x_1, \dots, y_i, \dots, x_n) \end{aligned}$$

является следствием равенств (4.3.2), (4.3.3), (4.3.5). Равенство

$$(4.3.8) \quad \begin{aligned} & (f + g) \circ (x_1, \dots, px_i, \dots, x_n) \\ &= f \circ (x_1, \dots, px_i, \dots, x_n) + g \circ (x_1, \dots, px_i, \dots, x_n) \\ &= pf \circ (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) + pg \circ (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \\ &= p(f \circ (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) + g \circ (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)) \\ &= p(f + g) \circ (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \end{aligned}$$

является следствием равенств (4.3.2), (4.3.4), (4.3.6). Из равенств (4.3.7), (4.3.8) и теоремы 4.3.2 следует, что отображение (4.3.1) является полилинейным отображением D -модулей.

Пусть $f, g, h \in \mathcal{L}(D; A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow S)$. Для любого $a = (a_1, \dots, a_n)$, $a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n$,

$$\begin{aligned} (f + g) \circ a &= f \circ a + g \circ a = g \circ a + f \circ a \\ &= (g + f) \circ a \\ ((f + g) + h) \circ a &= (f + g) \circ a + h \circ a = (f \circ a + g \circ a) + h \circ a \\ &= f \circ a + (g \circ a + h \circ a) = f \circ a + (g + h) \circ a \\ &= (f + (g + h)) \circ a \end{aligned}$$

Следовательно, сумма полилинейных отображений коммутативна и ассоциативна.

Из равенства (4.3.2) следует, что отображение

$$0 : v \in A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow 0 \in S$$

является нулём операции сложения

$$(0 + f) \circ (a_1, \dots, a_n) = 0 \circ (a_1, \dots, a_n) + f \circ (a_1, \dots, a_n) = f \circ (a_1, \dots, a_n)$$

Из равенства (4.3.2) следует, что отображение

$$-f : (a_1, \dots, a_n) \in A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow -(f \circ (a_1, \dots, a_n)) \in S$$

является отображением, обратным отображению f

$$f + (-f) = 0$$

так как

$$\begin{aligned}(f + (-f)) \circ (a_1, \dots, a_n) &= f \circ (a_1, \dots, a_n) + (-f) \circ (a_1, \dots, a_n) \\ &= f \circ (a_1, \dots, a_n) - f \circ (a_1, \dots, a_n) \\ &= 0 = 0 \circ (a_1, \dots, a_n)\end{aligned}$$

Из равенства

$$\begin{aligned}(f + g) \circ (a_1, \dots, a_n) &= f \circ (a_1, \dots, a_n) + g \circ (a_1, \dots, a_n) \\ &= g \circ (a_1, \dots, a_n) + f \circ (a_1, \dots, a_n) \\ &= (g + f) \circ (a_1, \dots, a_n)\end{aligned}$$

следует, что сумма отображений коммутативно. Следовательно, множество $\mathcal{L}(D; A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow S)$ является абелевой группой. \square

ТЕОРЕМА 4.3.4. Пусть D - коммутативное кольцо. Пусть A_1, \dots, A_n, S - D -модули. Отображение

$$(4.3.9) \quad df : A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow S \quad d \in D \quad f \in \mathcal{L}(D; A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow S)$$

определённое равенством

$$(4.3.10) \quad (df) \circ (a_1, \dots, a_n) = d(f \circ (a_1, \dots, a_n))$$

называется **произведением отображения f на скаляр d** и является полилинейным отображением. Представление

$$(4.3.11) \quad a : f \in \mathcal{L}(D; A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow S) \rightarrow af \in \mathcal{L}(D; A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow S)$$

кольца D в абелевой группе $\mathcal{L}(D; A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow S)$ порождает структуру D -модуля.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 4.3.2

$$(4.3.12) \quad f \circ (a_1, \dots, a_i + b_i, \dots, a_n) = f \circ (a_1, \dots, a_i, \dots, a_n) + f \circ (a_1, \dots, b_i, \dots, a_n)$$

$$(4.3.13) \quad f \circ (a_1, \dots, pa_i, \dots, a_n) = pf \circ (a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)$$

Равенство

$$\begin{aligned}(4.3.14) \quad & (pf) \circ (x_1, \dots, x_i + y_i, \dots, x_n) \\ &= p f \circ (x_1, \dots, x_i + y_i, \dots, x_n) \\ &= p (f \circ (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) + f \circ (x_1, \dots, y_i, \dots, x_n)) \\ &= p(f \circ (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)) + p(f \circ (x_1, \dots, y_i, \dots, x_n)) \\ &= (pf) \circ (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) + (pf) \circ (x_1, \dots, y_i, \dots, x_n)\end{aligned}$$

является следствием равенств (4.3.10), (4.3.12). Равенство

$$\begin{aligned}(4.3.15) \quad & (pf) \circ (x_1, \dots, qx_i, \dots, x_n) \\ &= p(f \circ (x_1, \dots, qx_i, \dots, x_n)) = pq(f \circ (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)) \\ &= qp(f \circ (x_1, \dots, x_n)) = q(pf) \circ (x_1, \dots, x_n)\end{aligned}$$

является следствием равенств (4.3.10), (4.3.13). Из равенств (4.3.14), (4.3.15) и теоремы 4.3.2 следует, что отображение (4.3.9) является полилинейным отображением D -модулей.

Равенство

$$(4.3.16) \quad (p + q)f = pf + qf$$

является следствием равенства

$$\begin{aligned} ((p+q)f) \circ (x_1, \dots, x_n) &= (p+q)(f \circ (x_1, \dots, x_n)) \\ &= p(f \circ (x_1, \dots, x_n)) + q(f \circ (x_1, \dots, x_n)) \\ &= (pf) \circ (x_1, \dots, x_n) + (qf) \circ (x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Равенство

$$(4.3.17) \quad p(qf) = (pq)f$$

является следствием равенства

$$\begin{aligned} (p(qf)) \circ (x_1, \dots, x_n) &= p(qf) \circ (x_1, \dots, x_n) = p(qf \circ (x_1, \dots, x_n)) \\ &= (pq)f \circ (x_1, \dots, x_n) = ((pq)f) \circ (x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Из равенств (4.3.16), (4.3.17), следует, что отображение (4.3.11) является представлением кольца D в абелевой группе $\mathcal{L}(D; A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow S)$. Так как указанное представление эффективно, то, согласно определению 4.1.2 и теореме 4.3.3, абелева группа $\mathcal{L}(D; A_1 \rightarrow A_2)$ является D -модулем. \square

4.4. D -модуль $\mathcal{L}(D; A \rightarrow B)$

ТЕОРЕМА 4.4.1.

$$(4.4.1) \quad \mathcal{L}(D; A^p \rightarrow \mathcal{L}(D; A^q \rightarrow B)) = \mathcal{L}(D; A^{p+q} \rightarrow B)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. \square

ТЕОРЕМА 4.4.2. Пусть

$$\bar{e} = \{e_i : i \in I\}$$

базис D -модуля A . Множество

$$(4.4.2) \quad \bar{h} = \{h^i \in \mathcal{L}(D; A \rightarrow D) : i \in I, h^i \circ e_j = \delta_j^i\}$$

является базисом D -модуля $\mathcal{L}(D; A \rightarrow D)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

ЛЕММА 4.4.3. Отображения h^i линейно независимы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть существуют D -числа c_i такие, что

$$c_i h^i = 0$$

Тогда для любого A -числа e_j

$$0 = c_i h^i \circ e_j = c_i \delta_j^i = c_j$$

Лемма является следствием определения 4.1.8. \odot

ЛЕММА 4.4.4. Отображение $f \in \mathcal{L}(D; A \rightarrow D)$, является линейной композицией отображений h^i .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого A -числа a ,

$$(4.4.3) \quad a = a^i e_i$$

равенство

$$(4.4.4) \quad h^i \circ a = h^i \circ (a^j e_j) = a^j (h^i \circ e_j) = a^j \delta_j^i = a^i$$

является следствием равенств (4.4.2), (4.4.3) и теоремы 4.2.2. Равенство

$$(4.4.5) \quad f \circ a = f \circ (a^i e_i) = a^i (f \circ e_i) = (f \circ e_i)(h^i \circ a)$$

является следствием равенства (4.4.4). Равенство

$$f = (f \circ e_i)h^i$$

является следствием равенств (4.2.4), (4.2.12), (4.4.5). \odot

Теорема является следствием лемм 4.4.3, 4.4.4 и определения 4.1.10. \square

ТЕОРЕМА 4.4.5. Пусть D - коммутативное кольцо. Пусть

$$\bar{e}_i = \{e_{i \cdot i} : i \in I_i\}$$

базис D -модуля A_i , $i = 1, \dots, n$. Пусть

$$\bar{e}_B = \{e_{B \cdot i} : i \in I\}$$

базис D -модуля B . Множество

$$(4.4.6) \quad \begin{aligned} \bar{h} = \{ & h_{i_1 \dots i_n}^{i_1 \dots i_n} \in \mathcal{L}(D; A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow B) : i \in I, i_i \in I_i, i = 1, \dots, n, \\ & h_{i_1 \dots i_n}^{i_1 \dots i_n} \circ (e_{1 \cdot j_1}, \dots, e_{n \cdot j_n}) = \delta_{j_1}^{i_1} \dots \delta_{j_n}^{i_n} e_{B \cdot i} \} \end{aligned}$$

является базисом D -модуля $\mathcal{L}(D; A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow B)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

ЛЕММА 4.4.6. Отображения $h_{i_1 \dots i_n}^{i_1 \dots i_n}$ линейно независимы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть существуют D -числа $c_{i_1 \dots i_n}^{i_1 \dots i_n}$ такие, что

$$c_{i_1 \dots i_n}^{i_1 \dots i_n} h_{i_1 \dots i_n}^{i_1 \dots i_n} = 0$$

Тогда для любого набора индексов j_1, \dots, j_n

$$0 = c_{i_1 \dots i_n}^{i_1 \dots i_n} h_{i_1 \dots i_n}^{i_1 \dots i_n} \circ (e_{1 \cdot j_1}, \dots, e_{n \cdot j_n}) = c_{i_1 \dots i_n}^{i_1 \dots i_n} \delta_{j_1}^{i_1} \dots \delta_{j_n}^{i_n} e_{B \cdot i} = c_{j_1 \dots j_n}^{i_1 \dots i_n} e_{B \cdot i}$$

Следовательно, $c_{j_1 \dots j_n}^{i_1 \dots i_n} = 0$. Лемма является следствием определения 4.1.8. \odot

ЛЕММА 4.4.7. Отображение $f \in \mathcal{L}(D; A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow B)$ является линейной композицией отображений $h_{i_1 \dots i_n}^{i_1 \dots i_n}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого A_1 -числа a_1

$$(4.4.7) \quad a_1 = a_1^{i_1} e_{1 \cdot i_1}$$

..., для любого A_n -числа a_n

$$(4.4.8) \quad a_n = a_n^{i_n} e_{n \cdot i_n}$$

равенство

$$(4.4.9) \quad \begin{aligned} h_{i_1 \dots i_n}^{i_1 \dots i_n} \circ (a_1, \dots, a_n) &= h_{i_1 \dots i_n}^{i_1 \dots i_n} \circ (a_1^{j_1} e_{1 \cdot j_1}, \dots, a_n^{j_n} e_{n \cdot j_n}) \\ &= a_1^{j_1} \dots a_n^{j_n} (h_{i_1 \dots i_n}^{i_1 \dots i_n} \circ (e_{1 \cdot j_1}, \dots, e_{n \cdot j_n})) \\ &= a_1^{j_1} \dots a_n^{j_n} \delta_{j_1}^{i_1} \dots \delta_{j_n}^{i_n} e_{B \cdot i} \\ &= a_1^{i_1} \dots a_n^{i_n} e_{B \cdot i} \end{aligned}$$

является следствием равенств (4.4.6), (4.4.7), (4.4.8) и теоремы 4.2.2. Равенство

$$(4.4.10) \quad \begin{aligned} f \circ (a_1, \dots, a_n) &= f \circ (a_1^{j_1} e_{1 \cdot j_1}, \dots, a_n^{j_n} e_{n \cdot j_n}) \\ &= a_1^{j_1} \dots a_n^{j_n} f \circ (e_{1 \cdot j_1}, \dots, e_{n \cdot j_n}) \end{aligned}$$

является следствием равенств (4.4.7), (4.4.8). Так как

$$f \circ (e_{1 \cdot j_1}, \dots, e_{n \cdot j_n}) \in B$$

то

$$(4.4.11) \quad f \circ (e_{1 \cdot j_1} \dots e_{n \cdot j_n}) = f_{j_1 \dots j_n}^i e_i$$

Равенство

$$(4.4.12) \quad \begin{aligned} f \circ (a_1, \dots, a_n) &= a_1^{i_1} \dots a_n^{i_n} f_{i_1 \dots i_n}^i e_i \\ &= f_{i_1 \dots i_n}^i h_i^{i_1 \dots i_n} \circ (a_1, \dots, a_n) \end{aligned}$$

является следствием равенств (4.4.9), (4.4.10), (4.4.11). Равенство

$$f = f_{i_1 \dots i_n}^i h_i^{i_1 \dots i_n}$$

является следствием равенств (4.3.2), (4.3.10), (4.4.12). \odot

Теорема является следствием лемм 4.4.6, 4.4.7 и определения 4.1.10. \square

ТЕОРЕМА 4.4.8. Пусть A_1, \dots, A_n, B - свободные модули над коммутативным кольцом D . D -модуль $\mathcal{L}(D; A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow B)$ является свободным D -модулем.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Теорема является следствием теоремы 4.4.5. \square

4.5. Тензорное произведение D -модулей

ТЕОРЕМА 4.5.1. Коммутативное кольцо D является абелевой мультипликативной Ω -группой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы полагаем, что произведение \circ в кольце D определён согласно правилу

$$a \circ b = ab$$

Так как произведение в кольце дистрибутивно относительно сложения, теорема является следствием определений 3.1.5, 3.1.8. \square

ТЕОРЕМА 4.5.2. Тензорное произведение $A_1 \otimes \dots \otimes A_n$ D -модулей A_1, \dots, A_n существует.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Теорема является следствием определения 4.1.2 и теорем 3.3.5, 4.5.1. \square

ТЕОРЕМА 4.5.3. Пусть D - коммутативное кольцо. Пусть A_1, \dots, A_n - D -модули. Тензорное произведение дистрибутивно относительно сложения

$$(4.5.1) \quad \begin{aligned} &a_1 \otimes \dots \otimes (a_i + b_i) \otimes \dots \otimes a_n \\ &= a_1 \otimes \dots \otimes a_i \otimes \dots \otimes a_n + a_1 \otimes \dots \otimes b_i \otimes \dots \otimes a_n \\ &a_i, b_i \in A_i \end{aligned}$$

Представление кольца D в тензорном произведении определено равенством

$$(4.5.2) \quad \begin{aligned} &a_1 \otimes \dots \otimes (ca_i) \otimes \dots \otimes a_n = c(a_1 \otimes \dots \otimes a_i \otimes \dots \otimes a_n) \\ &a_i \in A_i \quad c \in D \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенство (4.5.1) является следствием равенства (3.3.23). Равенство (4.5.2) является следствием равенства (3.3.24). \square

ТЕОРЕМА 4.5.4. Пусть A_1, \dots, A_n - модули над коммутативным кольцом D . Пусть

$$f : A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow A_1 \otimes \dots \otimes A_n$$

полилинейное отображение, определённое равенством

$$(4.5.3) \quad f \circ (d_1, \dots, d_n) = d_1 \otimes \dots \otimes d_n$$

Пусть

$$g : A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow V$$

полилинейное отображение в D -модуль V . Существует линейное отображение

$$h : A_1 \otimes \dots \otimes A_n \rightarrow V$$

такое, что диаграмма

$$(4.5.4) \quad \begin{array}{ccc} & & A_1 \otimes \dots \otimes A_n \\ & \nearrow f & \downarrow h \\ A_1 \times \dots \times A_n & & V \\ & \searrow g & \end{array}$$

коммутативна. Отображение h определено равенством

$$(4.5.5) \quad h(a_1 \otimes \dots \otimes a_n) = g(a_1, \dots, a_n)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Теорема является следствием теоремы 3.3.10 и определений 4.2.1, 4.3.1. \square

ТЕОРЕМА 4.5.5. Отображение

$$(v_1, \dots, v_n) \in V_1 \times \dots \times V_n \rightarrow v_1 \otimes \dots \otimes v_n \in V_1 \otimes \dots \otimes V_n$$

является полилинейным отображением.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Теорема является следствием теоремы 3.3.9 и определения 4.3.1. \square

ТЕОРЕМА 4.5.6. Тензорное произведение $A_1 \otimes \dots \otimes A_n$ свободных конечномерных модулей A_1, \dots, A_n над коммутативным кольцом D является свободным конечномерным модулем.

Пусть \bar{e}_i - базис модуля A_i над кольцом D . Произвольный тензор $a \in A_1 \otimes \dots \otimes A_n$ можно представить в виде

$$(4.5.6) \quad a = a^{i_1 \dots i_n} e_{1 \cdot i_1} \otimes \dots \otimes e_{n \cdot i_n}$$

Мы будем называть выражение $a^{i_1 \dots i_n}$ стандартной компонентой тензора.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вектор $a_i \in A_i$ имеет разложение

$$a_i = a_i^k \bar{e}_{i \cdot k}$$

относительно базиса \bar{e}_i . Из равенств (4.5.1), (4.5.2) следует

$$a_1 \otimes \dots \otimes a_n = a_1^{i_1} \dots a_n^{i_n} e_{1 \cdot i_1} \otimes \dots \otimes e_{n \cdot i_n}$$

Так как множество тензоров $a_1 \otimes \dots \otimes a_n$ является множеством образующих модуля $A_1 \otimes \dots \otimes A_n$, то тензор $a \in A_1 \otimes \dots \otimes A_n$ можно записать в виде

$$(4.5.7) \quad a = a^s a_{s \cdot 1}^{i_1} \dots a_{s \cdot n}^{i_n} e_{1 \cdot i_1} \otimes \dots \otimes e_{n \cdot i_n}$$

где $a^s, a_{s \cdot 1}^{i_1}, \dots, a_{s \cdot n}^{i_n} \in F$. Положим

$$a^s a_{s \cdot 1}^{i_1} \dots a_{s \cdot n}^{i_n} = a^{i_1 \dots i_n}$$

Тогда равенство (4.5.7) примет вид (4.5.6).

Следовательно, множество тензоров $e_{1 \cdot i_1} \otimes \dots \otimes e_{n \cdot i_n}$ является множеством образующих модуля $A_1 \otimes \dots \otimes A_n$. Так как размерность модуля A_i , $i = 1, \dots, n$, конечна, то конечно множество тензоров $e_{1 \cdot i_1} \otimes \dots \otimes e_{n \cdot i_n}$. Следовательно, множество тензоров $e_{1 \cdot i_1} \otimes \dots \otimes e_{n \cdot i_n}$ содержит базис модуля $A_1 \otimes \dots \otimes A_n$, и модуль $A_1 \otimes \dots \otimes A_n$ является свободным модулем над кольцом D . \square

D -алгебра

5.1. Алгебра над коммутативным кольцом

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1.1. Пусть D - коммутативное кольцо. D -модуль A называется **алгеброй над кольцом D** или **D -алгеброй**, если определена операция произведения^{5.1} в A

$$(5.1.1) \quad v w = C \circ (v, w)$$

где C - билинейное отображение

$$C : A \times A \rightarrow A$$

Если A является свободным D -модулем, то A называется **свободной алгеброй над кольцом D** . □

ТЕОРЕМА 5.1.2. Произведение в алгебре A дистрибутивно по отношению к сложению.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение теоремы следует из цепочки равенств

$$\begin{aligned} (a + b)c &= f \circ (a + b, c) = f \circ (a, c) + f \circ (b, c) = ac + bc \\ a(b + c) &= f \circ (a, b + c) = f \circ (a, b) + f \circ (a, c) = ab + ac \end{aligned}$$

□

Произведение в алгебре может быть ни коммутативным, ни ассоциативным. Следующие определения основаны на определениях, данным в [10], с. 13.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1.3. Коммутатор

$$[a, b] = ab - ba$$

служит мерой коммутативности в D -алгебре A . D -алгебра A называется **коммутативной**, если

$$[a, b] = 0$$

□

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1.4. Ассоциатор

$$(5.1.2) \quad (a, b, c) = (ab)c - a(bc)$$

служит мерой ассоциативности в D -алгебре A . D -алгебра A называется **ассоциативной**, если

$$(a, b, c) = 0$$

□

^{5.1}Я следую определению, приведенному в [10], с. 1, [8], с. 4. Утверждение, верное для произвольного D -модуля, верно также для D -алгебры.

ТЕОРЕМА 5.1.5. Пусть A - алгебра над коммутативным кольцом D .^{5.2}

$$(5.1.3) \quad a(b, c, d) + (a, b, c)d = (ab, c, d) - (a, bc, d) + (a, b, cd)$$

для любых $a, b, c, d \in A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенство (5.1.3) следует из цепочки равенств

$$\begin{aligned} a(b, c, d) + (a, b, c)d &= a((bc)d - b(cd)) + ((ab)c - a(bc))d \\ &= a((bc)d - a(b(cd)) + ((ab)c)d - (a(bc))d \\ &= ((ab)c)d - (ab)(cd) + (ab)(cd) \\ &+ a((bc)d - a(b(cd)) - (a(bc))d \\ &= (ab, c, d) - (a(bc))d + a((bc)d) + (ab)(cd) - a(b(cd)) \\ &= (ab, c, d) - (a, (bc), d) + (a, b, cd) \end{aligned}$$

□

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1.6. Ядро D -алгебры A - это множество^{5.3}

$$N(A) = \{a \in A : \forall b, c \in A, (a, b, c) = (b, a, c) = (b, c, a) = 0\}$$

□

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1.7. Центр D -алгебры A - это множество^{5.4}

$$Z(A) = \{a \in A : a \in N(A), \forall b \in A, ab = ba\}$$

□

ТЕОРЕМА 5.1.8. Пусть D - коммутативное кольцо. Если D -алгебра A имеет единицу, то существует изоморфизм f кольца D в центр алгебры A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $e \in A$ - единица алгебры A . Положим $f \circ a = ae$. □

Пусть \bar{e} - базис свободной алгебры A над кольцом D . Если алгебра A имеет единицу, положим e_0 - единица алгебры A .

ТЕОРЕМА 5.1.9. Пусть \bar{e} - базис свободной алгебры A над кольцом D . Пусть

$$a = a^i e_i \quad b = b^i e_i \quad a, b \in A$$

Произведение a, b можно получить согласно правилу

$$(5.1.4) \quad (ab)^k = C_{ij}^k a^i b^j$$

где C_{ij}^k - структурные константы алгебры A над кольцом D . Произведение базисных векторов в алгебре A определено согласно правилу

$$(5.1.5) \quad e_i e_j = C_{ij}^k e_k$$

^{5.2}Утверждение теоремы опирается на равенство [10]-(2.4).

^{5.3}Определение дано на базе аналогичного определения в [10], с. 13

^{5.4}Определение дано на базе аналогичного определения в [10], с. 14

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенство (5.1.5) является следствием утверждения, что \bar{e} является базисом алгебры A . Так как произведение в алгебре является билинейным отображением, то произведение a и b можно записать в виде

$$(5.1.6) \quad ab = a^i b^j e_i e_j$$

Из равенств (5.1.5), (5.1.6), следует

$$(5.1.7) \quad ab = a^i b^j C_{ij}^k e_k$$

Так как \bar{e} является базисом алгебры A , то равенство (5.1.4) следует из равенства (5.1.7). \square

ТЕОРЕМА 5.1.10. Если алгебра A коммутативна, то

$$(5.1.8) \quad C_{ij}^p = C_{ji}^p$$

Если алгебра A ассоциативна, то

$$(5.1.9) \quad C_{ij}^p C_{pk}^q = C_{ip}^q C_{jk}^p$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для коммутативной алгебры, равенство (5.1.8) следует из равенства

$$e_i e_j = e_j e_i$$

Для ассоциативной алгебры, равенство (5.1.9) следует из равенства

$$(e_i e_j) e_k = e_i (e_j e_k)$$

\square

ТЕОРЕМА 5.1.11. Представление

$$(5.1.10) \quad f_{2,3} : A \dashrightarrow A$$

D -модуля A в D -модуле A эквивалентно структуре D -алгебры A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

- Пусть в D -модуле A определена структура D -алгебры A , порождённая произведением

$$v w = C \circ (v, w)$$

Согласно определениям 5.1.1 и 4.3.1, левый сдвиг D -модуля A , определённый равенством

$$(5.1.11) \quad l \circ v : w \in A \rightarrow v w \in A$$

является линейным отображением. Согласно определению 4.2.1, отображение $l \circ v$ является эндоморфизмом D -модуля A .

Равенство

$$(5.1.12) \quad (l \circ (v_1 + v_2)) \circ w = (v_1 + v_2)w = v_1 w + v_2 w = (l \circ v_1) \circ w + (l \circ v_2) \circ w$$

является следствием определения 4.3.1 и равенства (5.1.11). Согласно теореме 4.2.3, равенство

$$(5.1.13) \quad l \circ (v_1 + v_2) = l \circ v_1 + l \circ v_2$$

является следствием равенства (5.1.12). Равенство

$$(5.1.14) \quad (l \circ (dv)) \circ w = (dv)w = d(vw) = d((l \circ v) \circ w)$$

является следствием определения 4.3.1 и равенства (5.1.11). Согласно теореме 4.2.3, равенство

$$(5.1.15) \quad l \circ (dv) = d(l \circ v)$$

является следствием равенства (5.1.14). Из равенств (5.1.13), (5.1.15) следует, что отображение

$$f_{2,3} : v \rightarrow l \circ v$$

является представлением D -модуля A в D -модуле A

$$(5.1.16) \quad f_{2,3} : A \dashrightarrow A \quad f_{2,3} \circ v : w \rightarrow (l \circ v) \circ w$$

- Рассмотрим представление (5.1.10) D -модуля A в D -модуле A . Поскольку отображение $f_{2,3} \circ v$ является эндоморфизмом D -модуля A , то

$$(5.1.17) \quad \begin{aligned} (f_{2,3} \circ v)(w_1 + w_2) &= (f_{2,3} \circ v) \circ w_1 + (f_{2,3} \circ v) \circ w_2 \\ (f_{2,3} \circ v) \circ (dw) &= d((f_{2,3} \circ v) \circ w) \end{aligned}$$

Поскольку отображение (5.1.10) является линейным отображением

$$f_{2,3} : A \rightarrow \mathcal{L}(D; A; A)$$

то, согласно теоремам 4.2.3, 4.2.4,

$$(5.1.18) \quad (f_{2,3} \circ (v_1 + v_2)) \circ w = (f_{2,3} \circ v_1 + f_{2,3} \circ v_2)(w) = (f_{2,3} \circ v_1) \circ w + (f_{2,3} \circ v_2) \circ w$$

$$(5.1.19) \quad (f_{2,3} \circ (dv)) \circ w = d(f_{2,3} \circ v) \circ w = d((f_{2,3} \circ v) \circ w)$$

Из равенств (5.1.17), (5.1.18), (5.1.19) и определения 4.3.1, следует, что отображение $f_{2,3}$ является билинейным отображением. Следовательно, отображение $f_{2,3}$ определяет произведение в D -модуле A согласно правилу

$$vw = (f_{2,3} \circ v) \circ w$$

□

СЛЕДСТВИЕ 5.1.12. D - коммутативное кольцо, A - абелева группа. Диаграмма представлений

$$(5.1.20) \quad \begin{array}{ccc} D \xrightarrow{g_{1,2}} A \xrightarrow{g_{2,3}} A & g_{1,2}(d) : v \rightarrow dv & \\ \uparrow g_{1,2} & g_{2,3}(v) : w \rightarrow C \circ (v, w) & \\ D & C \in \mathcal{L}(D; A^2 \rightarrow A) & \end{array}$$

порождает структуру D -алгебры A .

□

5.2. Линейный гомоморфизм

ТЕОРЕМА 5.2.1. Пусть

$$(5.2.1) \quad \begin{array}{ccc} D_1 \xrightarrow{g_{1 \cdot 1, 2}} A_1 \xrightarrow{g_{1 \cdot 2, 3}} A_1 & & g_{1 \cdot 1, 2}(d) : v \rightarrow d v \\ & \uparrow g_{1 \cdot 1, 2} & g_{1 \cdot 2, 3}(v) : w \rightarrow C_1 \circ (v, w) \\ & D_1 & C_1 \in \mathcal{L}(D_1; A_1^2 \rightarrow A_1) \end{array}$$

диаграмма представлений, описывающая D_1 -алгебру A_1 . Пусть

$$(5.2.2) \quad \begin{array}{ccc} D_2 \xrightarrow{g_{2 \cdot 1, 2}} A_2 \xrightarrow{g_{2 \cdot 2, 3}} A_2 & & g_{2 \cdot 1, 2}(d) : v \rightarrow d v \\ & \uparrow g_{2 \cdot 1, 2} & g_{2 \cdot 2, 3}(v) : w \rightarrow C_2 \circ (v, w) \\ & D_2 & C_2 \in \mathcal{L}(D_2; A_2^2 \rightarrow A_2) \end{array}$$

диаграмма представлений, описывающая D_2 -алгебру A_2 . Морфизм D_1 -алгебры A_1 в D_2 -алгебру A_2 - это кортеж отображений

$$r_1 : D_1 \rightarrow D_2 \quad r_2 : A_1 \rightarrow A_2$$

где отображение r_1 является гомоморфизмом кольца D_1 в кольцо D_2 и отображение r_2 является линейным отображением D_1 -алгебры A_1 в D_2 -алгебру A_2 таким, что

$$(5.2.3) \quad r_2(ab) = r_2(a)r_2(b)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно равенствам [4]-(4.2.3), морфизм (r_1, r_2) представления $f_{1,2}$ удовлетворяет равенству

$$(5.2.4) \quad \begin{aligned} r_2(f_{1 \cdot 1, 2}(d)(a)) &= f_{2 \cdot 1, 2}(r_1(d))(r_2(a)) \\ r_2(da) &= r_1(d)r_2(a) \end{aligned}$$

Следовательно, отображение (r_1, r_2) является линейным отображением.

Согласно равенству [4]-(4.2.3), морфизм (r_2, r_2) представления $f_{2,3}$ удовлетворяет равенству ^{5.5}

$$(5.2.5) \quad r_2(f_{1 \cdot 2, 3}(a_2)(a_3)) = f_{2 \cdot 2, 3}(r_2(a_2))(r_2(a_3))$$

Из равенств (5.2.5), (5.2.1), (5.2.2), следует

$$(5.2.6) \quad r_2(C_1(v, w)) = C_2(r_2(v), r_2(w))$$

Равенство (5.2.3) следует из равенств (5.2.6), (5.1.1). \square

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.2.2. Морфизм представлений D_1 -алгебры A_1 в D_2 -алгебру A_2 называется **линейным гомоморфизмом** D_1 -алгебры A_1 в D_2 -алгебру A_2 . \square

^{5.5}Так как в диаграммах представлений (5.2.1), (5.2.2), носители Ω_2 -алгебры и Ω_3 -алгебры совпадают, то также совпадают морфизмы представлений на уровнях 2 и 3.

ТЕОРЕМА 5.2.3. Пусть \bar{e}_1 - базис D_1 -алгебры A_1 . Пусть \bar{e}_2 - базис D_2 -алгебры A_2 . Тогда линейный гомоморфизм^{5.6} (r_1, r_2) D_1 -алгебры A_1 в D_2 -алгебру A_2 имеет представление^{5.7}

$$(5.2.7) \quad b = e_{2*}^* r_{2*}^* r_1(a) = e_{2 \cdot i} r_{2 \cdot j}^i r_1(a^j)$$

$$(5.2.8) \quad b = r_{2*}^* r_1(a)$$

относительно заданных базисов. Здесь

- a - координатная матрица вектора \bar{a} относительно базиса \bar{e}_1 .
- b - координатная матрица вектора

$$b = r_2(a)$$

относительно базиса \bar{e}_2 .

- r_2 - координатная матрица множества векторов $(r_2(e_{1 \cdot i}))$ относительно базиса \bar{e}_2 . Мы будем называть матрицу r_2 **матрицей линейного гомоморфизма** относительно базисов \bar{e}_1 и \bar{e}_2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вектор $\bar{a} \in A_1$ имеет разложение

$$\bar{a} = e_{1*}^* a$$

относительно базиса \bar{e}_1 . Вектор $\bar{b} \in A_2$ имеет разложение

$$(5.2.9) \quad \bar{b} = e_{2*}^* b$$

относительно базиса \bar{e}_2 .

Так как (r_1, r_2) - линейный гомоморфизм, то на основании (5.2.4) следует, что

$$(5.2.10) \quad b = r_2(a) = r_2(e_{1*}^* a) = r_2(e_1)_*^* r_1(a)$$

где

$$r_1(a) = \begin{pmatrix} r_1(a^1) \\ \dots \\ r_1(a^n) \end{pmatrix}$$

$r_2(e_{1 \cdot i})$ также вектор D -модуля A_2 и имеет разложение

$$(5.2.11) \quad r_2(e_{1 \cdot i}) = e_{2*}^* r_{2 \cdot i} = e_{2 \cdot j} r_{2 \cdot i}^j$$

относительно базиса \bar{e}_2 . Комбинируя (5.2.10) и (5.2.11), мы получаем (5.2.7). (5.2.8) следует из сравнения (5.2.9) и (5.2.7) и теоремы [3]-5.3.3. \square

ТЕОРЕМА 5.2.4. Пусть \bar{e}_1 - базис $D_1 \star$ -алгебры A_1 . Пусть \bar{e}_2 - базис $D_2 \star$ -алгебры A_2 . Если отображение r_1 является инъекцией, то матрица линейного гомоморфизма и структурные константы связаны соотношением

$$(5.2.12) \quad r_{2 \cdot k}^l r_1(C_{1 \cdot i j}^k) = C_{2 \cdot p q}^l r_{2 \cdot i}^p r_{2 \cdot j}^q$$

^{5.6}Эта теорема аналогична теореме [3]-5.4.3.

^{5.7}Произведение матриц над коммутативным кольцом определено только как $*$ -произведение. Однако я предпочитаю явно указывать операцию, так как в этом случае видно, что в выражении участвуют матрицы. Кроме того, я планирую рассмотреть подобную теорему в некоммутативном случае.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$\bar{a}, \bar{b} \in A_1 \quad \bar{a} = e_{1*} * a \quad \bar{b} = e_{1*} * b$$

Из равенств (5.1.4), (5.1.1), (5.2.1), следует

$$(5.2.13) \quad ab = e_{1 \cdot k} C_{1 \cdot ij}^k a^i b^j$$

Из равенств (5.2.4), (5.2.13), следует

$$(5.2.14) \quad r_2(ab) = r_2(e_{1 \cdot k}) r_1(C_{1 \cdot ij}^k a^i b^j)$$

Поскольку отображение r_1 является гомоморфизмом колец, то из равенства (5.2.14), следует

$$(5.2.15) \quad r_2(ab) = r_2(e_{1 \cdot k}) r_1(C_{1 \cdot ij}^k) r_1(a^i) r_1(b^j)$$

Из теоремы 5.2.3 и равенства (5.2.15), следует

$$(5.2.16) \quad r_2(ab) = e_{2 \cdot l} r_{2 \cdot k}^l r_1(C_{1 \cdot ij}^k) r_1(a^i) r_1(b^j)$$

Из равенства (5.2.3) и теоремы 5.2.3, следует

$$(5.2.17) \quad r_2(ab) = r_2(a) r_2(b) = e_{2 \cdot p} r_1(a^i) r_{2 \cdot i}^p e_{2 \cdot q} r_1(b^j) r_{2 \cdot j}^q$$

Из равенств (5.1.4), (5.1.1), (5.2.2), (5.2.17), следует

$$(5.2.18) \quad r_2(ab) = e_{2 \cdot l} C_{2 \cdot pq}^l r_1(a^i) r_{2 \cdot i}^p r_1(b^j) r_{2 \cdot j}^q$$

Из равенств (5.2.16), (5.2.18), следует

$$(5.2.19) \quad e_{2 \cdot l} r_{2 \cdot k}^l r_1(C_{1 \cdot ij}^k) r_1(a^i) r_1(b^j) = e_{2 \cdot l} C_{2 \cdot pq}^l r_1(a^i) r_{2 \cdot i}^p r_1(b^j) r_{2 \cdot j}^q$$

Равенство (5.2.12) следует из равенства (5.2.19), так как векторы базиса \bar{e}_2 линейно независимы, и a^i, b^i (а следовательно, $r_1(a^i), r_1(b^i)$) - произвольные величины. \square

5.3. Линейный автоморфизм алгебры кватернионов

Определение координат линейного автоморфизма - задача непростая. В этом разделе мы рассмотрим пример нетривиального линейного автоморфизма алгебры кватернионов.

ТЕОРЕМА 5.3.1. Координаты линейного автоморфизма алгебры кватернионов удовлетворяют системе уравнений

$$(5.3.1) \quad \begin{cases} r_1^1 = r_2^2 r_3^3 - r_2^3 r_3^2 & r_2^1 = r_3^2 r_1^3 - r_3^3 r_1^2 & r_3^1 = r_1^2 r_2^3 - r_1^3 r_2^2 \\ r_1^2 = r_2^3 r_3^1 - r_2^1 r_3^3 & r_2^2 = r_3^3 r_1^1 - r_3^1 r_1^3 & r_3^2 = r_1^3 r_2^1 - r_1^1 r_2^3 \\ r_1^3 = r_2^1 r_3^2 - r_2^2 r_3^1 & r_2^3 = r_3^1 r_1^2 - r_3^2 r_1^1 & r_3^3 = r_1^1 r_2^2 - r_1^2 r_2^1 \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теоремам [5]-4.3.1, 5.2.4, линейный автоморфизм алгебры кватернионов удовлетворяет уравнениям

$$(5.3.2) \quad \begin{aligned} r_0^l &= r_0^p r_0^q C_{pq}^l & r_1^l &= r_0^p r_1^q C_{pq}^l & r_2^l &= r_0^p r_2^q C_{pq}^l & r_3^l &= r_0^p r_3^q C_{pq}^l \\ r_1^l &= r_1^p r_0^q C_{pq}^l & -r_0^l &= r_1^p r_1^q C_{pq}^l & r_3^l &= r_1^p r_2^q C_{pq}^l & -r_2^l &= r_1^p r_3^q C_{pq}^l \\ r_2^l &= r_2^p r_0^q C_{pq}^l & -r_3^l &= r_2^p r_1^q C_{pq}^l & -r_0^l &= r_2^p r_2^q C_{pq}^l & r_1^l &= r_2^p r_3^q C_{pq}^l \\ r_3^l &= r_3^p r_0^q C_{pq}^l & r_2^l &= r_3^p r_1^q C_{pq}^l & -r_1^l &= r_3^p r_2^q C_{pq}^l & -r_0^l &= r_3^p r_3^q C_{pq}^l \end{aligned}$$

Из равенства (5.3.2) следует

$$(5.3.3) \quad \begin{aligned} r_1^l &= r_0^p r_1^q C_{pq}^l = r_2^p r_3^q C_{pq}^l & r_0^p r_1^q C_{pq}^l &= r_0^p r_1^q C_{qp}^l & r_2^p r_3^q C_{pq}^l &= -r_2^p r_3^q C_{qp}^l \\ r_2^l &= r_0^p r_2^q C_{pq}^l = r_3^p r_1^q C_{pq}^l & r_0^p r_2^q C_{pq}^l &= r_0^p r_2^q C_{qp}^l & r_3^p r_1^q C_{pq}^l &= -r_1^p r_3^q C_{pq}^l \\ r_3^l &= r_0^p r_3^q C_{pq}^l = r_1^p r_2^q C_{pq}^l & r_0^p r_3^q C_{pq}^l &= r_0^p r_3^q C_{qp}^l & r_1^p r_2^q C_{pq}^l &= -r_1^p r_2^q C_{qp}^l \end{aligned}$$

$$(5.3.4) \quad r_0^l = r_0^p r_0^q C_{pq}^l = -r_1^p r_1^q C_{pq}^l = -r_2^p r_2^q C_{pq}^l = -r_3^p r_3^q C_{pq}^l$$

Если $l = 0$, то из равенства

$$C_{pq}^0 = C_{qp}^0$$

следует

$$(5.3.5) \quad r_i^p r_j^q C_{pq}^0 = r_i^p r_j^q C_{qp}^0$$

Из равенства (5.3.3) для $l = 0$ и равенства (5.3.5), следует

$$(5.3.6) \quad r_1^0 = r_2^0 = r_3^0 = 0$$

Если $l = 1, 2, 3$, то равенство (5.3.3) можно записать в виде

$$(5.3.7) \quad \left\{ \begin{aligned} r_i^l &= r_0^l r_i^0 C_{l0}^l + r_0^0 r_i^l C_{0l}^l + r_0^a r_i^b C_{ab}^l + r_0^b r_i^a C_{ba}^l \\ &= r_0^l r_i^0 C_{l0}^l + r_0^0 r_i^l C_{0l}^l + r_0^a r_i^b C_{ab}^l + r_0^b r_i^a C_{ba}^l \\ &= r_0^l r_i^0 C_{l0}^l + r_0^0 r_i^l C_{l0}^l + r_0^a r_i^b C_{ba}^l + r_0^b r_i^a C_{ab}^l \\ &\quad i = 1, 2, 3 \\ r_i^l &= r_k^0 r_j^l C_{0l}^l + r_k^l r_j^0 C_{l0}^l + r_k^a r_j^b C_{ab}^l + r_k^b r_j^a C_{ba}^l \\ &= r_k^0 r_j^l C_{0l}^l + r_k^l r_j^0 C_{l0}^l + r_k^a r_j^b C_{ab}^l + r_k^b r_j^a C_{ba}^l \\ &= -r_k^0 r_j^l C_{l0}^l - r_k^l r_j^0 C_{0l}^l - r_k^a r_j^b C_{ba}^l - r_k^b r_j^a C_{ab}^l \\ &\quad i = 1 \quad k = 2 \quad j = 3 \\ &\quad i = 2 \quad k = 3 \quad j = 1 \\ &\quad i = 3 \quad k = 1 \quad j = 2 \\ &\quad 0 < a < b \quad a \neq l \quad b \neq l \end{aligned} \right.$$

Из равенств (5.3.7), (5.3.6) и равенств

$$(5.3.8) \quad \begin{aligned} C_{0l}^l &= C_{l0}^l = 1 \\ C_{ab}^l &= -C_{ba}^l \end{aligned}$$

следует

$$(5.3.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} r_i^l = r_0^0 r_i^l + r_0^a r_i^b C_{ab}^l - r_0^b r_i^a C_{ab}^l \\ \quad r_0^0 r_i^l + r_0^a r_i^b C_{ab}^l - r_0^b r_i^a C_{ab}^l \\ \quad = r_0^0 r_i^l - r_0^a r_i^b C_{ab}^l + r_0^b r_i^a C_{ab}^l \\ \quad i = 1, 2, 3 \\ r_i^l = r_k^a r_j^b C_{ab}^l - r_k^b r_j^a C_{ab}^l \\ \quad r_k^a r_j^b C_{ab}^l - r_k^b r_j^a C_{ab}^l \\ \quad = r_k^a r_j^b C_{ab}^l - r_k^b r_j^a C_{ab}^l \\ \quad i = 1 \quad k = 2 \quad j = 3 \\ \quad i = 2 \quad k = 3 \quad j = 1 \\ \quad i = 3 \quad k = 1 \quad j = 2 \\ \quad 0 < a < b \quad a \neq l \quad b \neq l \end{array} \right.$$

Из равенств (5.3.9) следует

$$(5.3.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} r_i^l = r_0^0 r_i^l \\ \quad r_0^a r_i^b - r_0^b r_i^a = 0 \\ \quad i = 1, 2, 3 \\ r_i^l = r_k^a r_j^b C_{ab}^l - r_k^b r_j^a C_{ab}^l \\ \quad i = 1 \quad k = 2 \quad j = 3 \\ \quad i = 2 \quad k = 3 \quad j = 1 \\ \quad i = 3 \quad k = 1 \quad j = 2 \\ \quad 0 < a < b \quad a \neq l \quad b \neq l \end{array} \right.$$

Из равенства (5.3.10) следует

$$(5.3.11) \quad r_0^0 = 1$$

Из равенства (5.3.4) для $l = 0$ следует

$$(5.3.12) \quad \begin{aligned} r_0^0 &= r_0^0 r_0^0 - r_0^1 r_0^1 - r_0^2 r_0^2 - r_0^3 r_0^3 \\ &= -r_0^0 r_0^0 + r_0^1 r_0^1 + r_0^2 r_0^2 + r_0^3 r_0^3 \\ &i = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

Из равенств (5.3.6), (5.3.10), (5.3.12), следует

$$(5.3.13) \quad \begin{aligned} 0 &= r_0^1 r_0^1 + r_0^2 r_0^2 + r_0^3 r_0^3 \\ 1 &= r_i^1 r_i^1 + r_i^2 r_i^2 + r_i^3 r_i^3 \\ &i = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

Из равенств (5.3.13) следует ^{5.8}

$$(5.3.14) \quad r_0^1 = r_0^2 = r_0^3 = 0$$

Из равенства (5.3.4) для $l > 0$ следует

$$(5.3.15) \quad \begin{aligned} r_0^l &= r_0^l r_0^0 C_{i0}^l + r_0^0 r_0^l C_{0l}^l + r_0^a r_0^b C_{ab}^l + r_0^b r_0^a C_{ba}^l \\ &= -r_i^l r_i^0 C_{i0}^l - r_i^0 r_i^l C_{0l}^l - r_i^a r_i^b C_{ab}^l - r_i^b r_i^a C_{ba}^l \\ i &> 0 \\ l &> 0 \quad 0 < a < b \quad a \neq l \quad b \neq l \end{aligned}$$

Равенства (5.3.15) тождественно верны в силу равенств (5.3.6), (5.3.14), (5.3.8). Из равенств (5.3.14), (5.3.10), следует

$$(5.3.16) \quad \left\{ \begin{aligned} r_i^l &= r_k^a r_j^b C_{ab}^l - r_k^b r_j^a C_{ab}^l \\ i &= 1 \quad k = 2 \quad j = 3 \\ i &= 2 \quad k = 3 \quad j = 1 \\ i &= 3 \quad k = 1 \quad j = 2 \\ l &> 0 \quad 0 < a < b \quad a \neq l \quad b \neq l \end{aligned} \right.$$

Равенства (5.3.1) следуют из равенств (5.3.16). \square

ПРИМЕР 5.3.2. Очевидно, координаты

$$r_j^i = \delta_j^i$$

удовлетворяют уравнению (5.3.1). Мы можем убедиться непосредственной проверкой, что координаты отображения

$$r_0^0 = 1 \quad r_2^1 = 1 \quad r_3^2 = 1 \quad r_1^3 = 1$$

также удовлетворяют уравнению (5.3.1). Матрица координат этого отображения имеет вид

$$r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

^{5.8}Мы здесь опираемся на то, что алгебра кватернионов определена над полем действительных чисел. Если рассматривать алгебру кватернионов над полем комплексных чисел, то уравнение (5.3.13) определяет конус в комплексном пространстве. Соответственно, у нас шире выбор координат линейного автоморфизма.

Согласно теореме [5]-4.3.4, стандартные компоненты отображения r имеют вид

$$\begin{aligned} r^{00} &= \frac{1}{4} & r^{11} &= -\frac{1}{4} & r^{22} &= -\frac{1}{4} & r^{33} &= -\frac{1}{4} \\ r^{10} &= -\frac{1}{4} & r^{01} &= \frac{1}{4} & r^{32} &= -\frac{1}{4} & r^{23} &= -\frac{1}{4} \\ r^{20} &= -\frac{1}{4} & r^{31} &= -\frac{1}{4} & r^{02} &= \frac{1}{4} & r^{13} &= -\frac{1}{4} \\ r^{30} &= -\frac{1}{4} & r^{21} &= -\frac{1}{4} & r^{12} &= -\frac{1}{4} & r^{03} &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Следовательно, отображение r имеет вид

$$r(a) = a^0 + a^2 i + a^3 j + a^1 k$$

$$\begin{aligned} r(a) &= \frac{1}{4}(a - iai - jaj - kak - ia + ai - kaj - jak \\ &\quad - ja - kai + aj - iak - ka - jai - iaj + ak) \end{aligned}$$

□

Линейное отображение алгебры

6.1. Линейное отображение алгебры

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.1.1. Пусть A_1 и A_2 - алгебры над кольцом D . Линейное отображение D -модуля A_1 в D -модуль A_2 называется **линейным отображением** D -алгебры A_1 в D -алгебру A_2 . Обозначим $\mathcal{L}(D; A_1 \rightarrow A_2)$ множество линейных отображений D -алгебры A_1 в D -алгебру A_2 . \square

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.1.2. Пусть A_1, \dots, A_n, S - D -алгебры. Полилинейное отображение

$$f : A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow S$$

D -модулей A_1, \dots, A_n в D -модуль S , Мы будем называть отображение **полилинейным отображением** D -алгебр A_1, \dots, A_n в D -модуль S . Обозначим $\mathcal{L}(D; A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow S)$ множество полилинейных отображений D -алгебр A_1, \dots, A_n в D -алгебру S . Обозначим $\mathcal{L}(D; A^n \rightarrow S)$ множество n -линейных отображений D -алгебры A ($A_1 = \dots = A_n = A$) в D -алгебру S . \square

ТЕОРЕМА 6.1.3. Тензорное произведение $A_1 \otimes \dots \otimes A_n$ D -алгебр A_1, \dots, A_n является D -алгеброй.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно определению 5.1.1 и теореме 4.5.2, тензорное произведение $A_1 \otimes \dots \otimes A_n$ D -алгебр A_1, \dots, A_n является D -модулем.

Рассмотрим отображение

$$(6.1.1) \quad * : (A_1 \times \dots \times A_n) \times (A_1 \times \dots \times A_n) \rightarrow A_1 \otimes \dots \otimes A_n$$

определённое равенством

$$(6.1.2) \quad (a_1, \dots, a_n) * (b_1, \dots, b_n) = (a_1 b_1) \otimes \dots \otimes (a_n b_n)$$

Для заданных значений переменных b_1, \dots, b_n , отображение (6.1.1) полилинейно по переменным a_1, \dots, a_n . Согласно теореме 4.5.4, существует линейное отображение

$$(6.1.3) \quad * (b_1, \dots, b_n) : A_1 \otimes \dots \otimes A_n \rightarrow A_1 \otimes \dots \otimes A_n$$

определённое равенством

$$(6.1.4) \quad (a_1 \otimes \dots \otimes a_n) * (b_1, \dots, b_n) = (a_1 b_1) \otimes \dots \otimes (a_n b_n)$$

Так как произвольный тензор $a \in A_1 \otimes \dots \otimes A_n$ можно представить в виде суммы тензоров вида $a_1 \otimes \dots \otimes a_n$, то для заданного тензора $a \in A_1 \otimes \dots \otimes A_n$ отображение (6.1.3) является полилинейным отображением переменных b_1, \dots, b_n . Согласно теореме 4.5.4, существует линейное отображение

$$(6.1.5) \quad * (a) : A_1 \otimes \dots \otimes A_n \rightarrow A_1 \otimes \dots \otimes A_n$$

определённое равенством

$$(6.1.6) \quad (a_1 \otimes \dots \otimes a_n) * (b_1 \otimes \dots \otimes b_n) = (a_1 b_1) \otimes \dots \otimes (a_n b_n)$$

Следовательно, равенство (6.1.6) определяет билинейное отображение

$$(6.1.7) \quad * : (A_1 \otimes \dots \otimes A_n) \times (A_1 \otimes \dots \otimes A_n) \rightarrow A_1 \otimes \dots \otimes A_n$$

Билинейное отображение (6.1.7) определяет произведение в D -модуле $A_1 \otimes \dots \otimes A_n$. \square

В случае тензорного произведения D -алгебр A_1, A_2 мы будем рассматривать произведение, определённое равенством

$$(6.1.8) \quad (a_1 \otimes a_2) \circ (b_1 \otimes b_2) = (a_1 b_1) \otimes (b_2 a_2)$$

ТЕОРЕМА 6.1.4. Пусть \bar{e}_i - базис алгебры A_i над кольцом D . Пусть $B_{i \cdot kl}^j$ - структурные константы алгебры A_i относительно базиса \bar{e}_i . Структурные константы тензорного произведения $A_1 \otimes \dots \otimes A_n$ относительно базиса $e_{1 \cdot i_1} \otimes \dots \otimes e_{n \cdot i_n}$ имеют вид

$$(6.1.9) \quad C_{\cdot k_1 \dots k_n \cdot l_1 \dots l_n}^{j_1 \dots j_n} = C_{1 \cdot k_1 l_1}^{j_1} \dots C_{n \cdot k_n l_n}^{j_n}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственное перемножение тензоров $e_{1 \cdot i_1} \otimes \dots \otimes e_{n \cdot i_n}$ имеет вид

$$\begin{aligned} & (e_{1 \cdot k_1} \otimes \dots \otimes e_{n \cdot k_n})(e_{1 \cdot l_1} \otimes \dots \otimes e_{n \cdot l_n}) \\ &= (\bar{e}_{1 \cdot k_1} \bar{e}_{1 \cdot l_1}) \otimes \dots \otimes (\bar{e}_{n \cdot k_n} \bar{e}_{n \cdot l_n}) \\ &= (\bar{e}_{1 \cdot k_1} \bar{e}_{1 \cdot l_1}) \otimes \dots \otimes (\bar{e}_{n \cdot k_n} \bar{e}_{n \cdot l_n}) \\ &= (C_{1 \cdot k_1 l_1}^{j_1} \bar{e}_{1 \cdot j_1}) \otimes \dots \otimes (C_{n \cdot k_n l_n}^{j_n} \bar{e}_{n \cdot j_n}) \\ &= C_{1 \cdot k_1 l_1}^{j_1} \dots C_{n \cdot k_n l_n}^{j_n} \bar{e}_{1 \cdot j_1} \otimes \dots \otimes \bar{e}_{n \cdot j_n} \end{aligned} \quad (6.1.10)$$

Согласно определению структурных констант

$$(6.1.11) \quad (e_{1 \cdot k_1} \otimes \dots \otimes e_{n \cdot k_n})(e_{1 \cdot l_1} \otimes \dots \otimes e_{n \cdot l_n}) = C_{\cdot k_1 \dots k_n \cdot l_1 \dots l_n}^{j_1 \dots j_n} (e_{1 \cdot j_1} \otimes \dots \otimes e_{n \cdot j_n})$$

Равенство (6.1.9) следует из сравнения (6.1.10), (6.1.11).

Из цепочки равенств

$$\begin{aligned} & (a_1 \otimes \dots \otimes a_n)(b_1 \otimes \dots \otimes b_n) \\ &= (a_1^{k_1} \bar{e}_{1 \cdot k_1} \otimes \dots \otimes a_n^{k_n} \bar{e}_{n \cdot k_n})(b_1^{l_1} \bar{e}_{1 \cdot l_1} \otimes \dots \otimes b_n^{l_n} \bar{e}_{n \cdot l_n}) \\ &= a_1^{k_1} \dots a_n^{k_n} b_1^{l_1} \dots b_n^{l_n} (\bar{e}_{1 \cdot k_1} \otimes \dots \otimes \bar{e}_{n \cdot k_n})(\bar{e}_{1 \cdot l_1} \otimes \dots \otimes \bar{e}_{n \cdot l_n}) \\ &= a_1^{k_1} \dots a_n^{k_n} b_1^{l_1} \dots b_n^{l_n} C_{\cdot k_1 \dots k_n \cdot l_1 \dots l_n}^{j_1 \dots j_n} (e_{1 \cdot j_1} \otimes \dots \otimes e_{n \cdot j_n}) \\ &= a_1^{k_1} \dots a_n^{k_n} b_1^{l_1} \dots b_n^{l_n} C_{1 \cdot k_1 l_1}^{j_1} \dots C_{n \cdot k_n l_n}^{j_n} (e_{1 \cdot j_1} \otimes \dots \otimes e_{n \cdot j_n}) \\ &= (a_1^{k_1} b_1^{l_1} C_{1 \cdot k_1 l_1}^{j_1} \bar{e}_{1 \cdot j_1}) \otimes \dots \otimes (a_n^{k_n} b_n^{l_n} C_{n \cdot k_n l_n}^{j_n} \bar{e}_{n \cdot j_n}) \\ &= (a_1 b_1) \otimes \dots \otimes (a_n b_n) \end{aligned}$$

следует, что определение произведения (6.1.11) со структурными константами (6.1.9) согласовано с определением произведения (6.1.6). \square

ТЕОРЕМА 6.1.5. Для тензоров $a, b \in A_1 \otimes \dots \otimes A_n$ стандартные компоненты произведения удовлетворяют равенству

$$(6.1.12) \quad (ab)^{j_1 \dots j_n} = C_{\cdot k_1 \dots k_n \cdot l_1 \dots l_n}^{j_1 \dots j_n} a^{k_1 \dots k_n} b^{l_1 \dots l_n}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно определению

$$(6.1.13) \quad ab = (ab)^{j_1 \dots j_n} e_{1 \cdot j_1} \otimes \dots \otimes e_{n \cdot j_n}$$

В тоже время

$$(6.1.14) \quad \begin{aligned} ab &= a^{k_1 \dots k_n} e_{1 \cdot k_1} \otimes \dots \otimes e_{n \cdot k_n} b^{l_1 \dots l_n} e_{1 \cdot l_1} \otimes \dots \otimes e_{n \cdot l_n} \\ &= a^{k_1 \dots k_n} b^{l_1 \dots l_n} C^{j_1 \dots j_n}_{k_1 \dots k_n \cdot l_1 \dots l_n} e_{1 \cdot j_1} \otimes \dots \otimes e_{n \cdot j_n} \end{aligned}$$

Равенство (6.1.12) следует из равенств (6.1.13), (6.1.14). \square

ТЕОРЕМА 6.1.6. Если алгебра A_i , $i = 1, \dots, n$, ассоциативна, то тензорное произведение $A_1 \otimes \dots \otimes A_n$ - ассоциативная алгебра.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку

$$\begin{aligned} &((e_{1 \cdot i_1} \otimes \dots \otimes e_{n \cdot i_n})(e_{1 \cdot j_1} \otimes \dots \otimes e_{n \cdot j_n}))(e_{1 \cdot k_1} \otimes \dots \otimes e_{n \cdot k_n}) \\ &= ((\bar{e}_{1 \cdot i_1} \bar{e}_{1 \cdot j_1}) \otimes \dots \otimes (\bar{e}_{n \cdot i_n} \bar{e}_{n \cdot j_n}))(e_{1 \cdot k_1} \otimes \dots \otimes e_{n \cdot k_n}) \\ &= ((\bar{e}_{1 \cdot i_1} \bar{e}_{1 \cdot j_1}) \bar{e}_{1 \cdot k_1}) \otimes \dots \otimes ((\bar{e}_{n \cdot i_n} \bar{e}_{n \cdot j_n}) \bar{e}_{n \cdot k_n}) \\ &= (\bar{e}_{1 \cdot i_1} (\bar{e}_{1 \cdot j_1} \bar{e}_{1 \cdot k_1})) \otimes \dots \otimes (\bar{e}_{n \cdot i_n} (\bar{e}_{n \cdot j_n} \bar{e}_{n \cdot k_n})) \\ &= (e_{1 \cdot i_1} \otimes \dots \otimes e_{n \cdot i_n})((\bar{e}_{1 \cdot j_1} \bar{e}_{1 \cdot k_1}) \otimes \dots \otimes (\bar{e}_{n \cdot j_n} \bar{e}_{n \cdot k_n})) \\ &= (e_{1 \cdot i_1} \otimes \dots \otimes e_{n \cdot i_n})((e_{1 \cdot j_1} \otimes \dots \otimes e_{n \cdot j_n})(e_{1 \cdot k_1} \otimes \dots \otimes e_{n \cdot k_n})) \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} (ab)c &= a^{i_1 \dots i_n} b^{j_1 \dots j_n} c^{k_1 \dots k_n} \\ &((e_{1 \cdot i_1} \otimes \dots \otimes e_{n \cdot i_n})(e_{1 \cdot j_1} \otimes \dots \otimes e_{n \cdot j_n}))(e_{1 \cdot k_1} \otimes \dots \otimes e_{n \cdot k_n}) \\ &= a^{i_1 \dots i_n} b^{j_1 \dots j_n} c^{k_1 \dots k_n} \\ &(e_{1 \cdot i_1} \otimes \dots \otimes e_{n \cdot i_n})((e_{1 \cdot j_1} \otimes \dots \otimes e_{n \cdot j_n})(e_{1 \cdot k_1} \otimes \dots \otimes e_{n \cdot k_n})) \\ &= a(bc) \end{aligned}$$

\square

ТЕОРЕМА 6.1.7. Пусть A - алгебра над коммутативным кольцом D . Существует линейное отображение

$$h : a \otimes b \in A \otimes A \rightarrow ab \in A$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Теорема является следствием определения 5.1.1 и теоремы 4.5.4. \square

ТЕОРЕМА 6.1.8. Пусть отображение

$$f : A_1 \rightarrow A_2$$

является линейным отображением D -алгебры A_1 в D -алгебру A_2 . Тогда отображения af , fb , a , $b \in A_2$, определённые равенствами

$$\begin{aligned} (af) \circ x &= a(f \circ x) \\ (fb) \circ x &= (f \circ x)b \end{aligned}$$

также являются линейными.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение теоремы следует из цепочек равенств

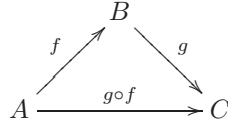
$$\begin{aligned}
 (af) \circ (x + y) &= a(f \circ (x + y)) = a(f \circ x + f \circ y) = a(f \circ x) + a(f \circ y) \\
 &= (af) \circ x + (af) \circ y \\
 (af) \circ (px) &= a(f \circ (px)) = ap(f \circ x) = pa(f \circ x) \\
 &= p((af) \circ x) \\
 (fb) \circ (x + y) &= (f \circ (x + y))b = (f \circ x + f \circ y)b = (f \circ x)b + (f \circ y)b \\
 &= (fb) \circ x + (fb) \circ y \\
 (fb) \circ (px) &= (f \circ (px))b = p(f \circ x)b \\
 &= p((fb) \circ x)
 \end{aligned}$$

□

6.2. Алгебра $\mathcal{L}(D; A \rightarrow A)$

ТЕОРЕМА 6.2.1. Пусть A, B, C - алгебры над коммутативным кольцом D . Пусть f - линейное отображение из D -алгебры A в D -алгебру B . Пусть g - линейное отображение из D -алгебры B в D -алгебру C . Отображение $g \circ f$, определённое диаграммой

(6.2.1)



является линейным отображением из D -алгебры A в D -алгебру C .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство теоремы следует из цепочек равенств

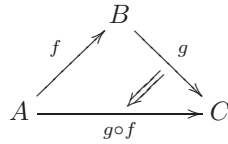
$$\begin{aligned}
 (g \circ f) \circ (a + b) &= g \circ (f \circ (a + b)) = g \circ (f \circ a + f \circ b) \\
 &= g \circ (f \circ a) + g \circ (f \circ b) = (g \circ f) \circ a + (g \circ f) \circ b \\
 (g \circ f) \circ (pa) &= g \circ (f \circ (pa)) = g \circ (p f \circ a) = p g \circ (f \circ a) \\
 &= p (g \circ f) \circ a
 \end{aligned}$$

□

ТЕОРЕМА 6.2.2. Пусть A, B, C - алгебры над коммутативным кольцом D . Пусть f - линейное отображение из D -алгебры A в D -алгебру B . Отображение f порождает линейное отображение

$$(6.2.2) \quad f^* : g \in \mathcal{L}(D; B \rightarrow C) \rightarrow g \circ f \in \mathcal{L}(D; A \rightarrow C)$$

(6.2.3)



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство теоремы следует из цепочек равенств ^{6.1}

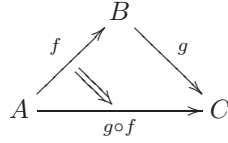
$$\begin{aligned}
 ((g_1 + g_2) \circ f) \circ a &= (g_1 + g_2) \circ (f \circ a) = g_1 \circ (f \circ a) + g_2 \circ (f \circ a) \\
 &= (g_1 \circ f) \circ a + (g_2 \circ f) \circ a \\
 &= (g_1 \circ f + g_2 \circ f) \circ a \\
 ((pg) \circ f) \circ a &= (pg) \circ (f \circ a) = p \, g \circ (f \circ a) = p \, (g \circ f) \circ a \\
 &= (p(g \circ f)) \circ a
 \end{aligned}$$

□

ТЕОРЕМА 6.2.3. Пусть A, B, C - алгебры над коммутативным кольцом D . Пусть g - линейное отображение из D -алгебры B в D -алгебру C . Отображение g порождает линейное отображение

$$(6.2.6) \quad g_* : f \in \mathcal{L}(D; A \rightarrow B) \rightarrow g \circ f \in \mathcal{L}(D; A \rightarrow C)$$

$$(6.2.7)$$



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство теоремы следует из цепочек равенств ^{6.2}

$$\begin{aligned}
 (g \circ (f_1 + f_2)) \circ a &= g \circ ((f_1 + f_2) \circ a) = g \circ (f_1 \circ a + f_2 \circ a) \\
 &= g \circ (f_1 \circ a) + g \circ (f_2 \circ a) = (g \circ f_1) \circ a + (g \circ f_2) \circ a \\
 &= (g \circ f_1 + g \circ f_2) \circ a \\
 (g \circ (pf)) \circ a &= g \circ ((pf) \circ a) = g \circ (p \, (f \circ a)) = p \, g \circ (f \circ a) \\
 &= p \, (g \circ f) \circ a = (p(g \circ f)) \circ a
 \end{aligned}$$

□

ТЕОРЕМА 6.2.4. Пусть A, B, C - алгебры над коммутативным кольцом D . Отображение

$$(6.2.10) \quad \circ : (g, f) \in \mathcal{L}(D; B \rightarrow C) \times \mathcal{L}(D; A \rightarrow B) \rightarrow g \circ f \in \mathcal{L}(D; A \rightarrow C)$$

является билинейным отображением.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Теорема является следствием теорем ^{6.2.2, 6.2.3.} □

^{6.1}Мы пользуемся следующими определениями операций над отображениями

$$(6.2.4) \quad (f + g) \circ a = f \circ a + g \circ a$$

$$(6.2.5) \quad (pf) \circ a = p \, f \circ a$$

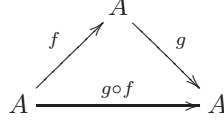
^{6.2}Мы пользуемся следующими определениями операций над отображениями

$$(6.2.8) \quad (f + g) \circ a = f \circ a + g \circ a$$

$$(6.2.9) \quad (pf) \circ a = p \, f \circ a$$

ТЕОРЕМА 6.2.5. Пусть A - алгебра над коммутативным кольцом D . D -модуль $\mathcal{L}(D; A \rightarrow A)$, оснащённый произведением

$$(6.2.11) \quad \circ : (g, f) \in \mathcal{L}(D; A \rightarrow A) \times \mathcal{L}(D; A \rightarrow A) \rightarrow g \circ f \in \mathcal{L}(D; A \rightarrow A)$$



является алгеброй над D .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Теорема является следствием определения 5.1.1 и теоремы 6.2.4. \square

6.3. Линейное отображение в ассоциативную алгебру

ТЕОРЕМА 6.3.1. Рассмотрим D -алгебры A_1 и A_2 . Для заданного отображения $f \in \mathcal{L}(D; A_1 \rightarrow A_2)$ отображение

$$g : A_2 \times A_2 \rightarrow \mathcal{L}(D; A_1 \rightarrow A_2) \\ g(a, b) \circ f = afb$$

является билинейным отображением.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение теоремы следует из цепочек равенств

$$\begin{aligned} ((a_1 + a_2)fb) \circ x &= (a_1 + a_2) f \circ x b = a_1 f \circ x b + a_2 f \circ x b \\ &= (a_1 fb) \circ x + (a_2 fb) \circ x = (a_1 fb + a_2 fb) \circ x \\ ((pa)fb) \circ x &= (pa) f \circ x b = p(a f \circ x b) = p((afb) \circ x) = (p(afb)) \circ x \\ (af(b_1 + b_2)) \circ x &= a f \circ x (b_1 + b_2) = a f \circ x b_1 + a f \circ x b_2 \\ &= (afb_1) \circ x + (afb_2) \circ x = (afb_1 + afb_2) \circ x \\ (af(pb)) \circ x &= a f \circ x (pb) = p(a f \circ x b) = p((afb) \circ x) = (p(afb)) \circ x \end{aligned}$$

\square

ТЕОРЕМА 6.3.2. Рассмотрим D -алгебры A_1 и A_2 . Для заданного отображения $f \in \mathcal{L}(D; A_1 \rightarrow A_2)$ существует линейное отображение

$$h : A_2 \otimes A_2 \rightarrow \mathcal{L}(D; A_1 \rightarrow A_2)$$

определённое равенством

$$(6.3.1) \quad (a \otimes b) \circ f = afb$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение теоремы является следствием теорем 4.5.4, 6.3.1. \square

ТЕОРЕМА 6.3.3. Рассмотрим D -алгебры A_1 и A_2 . Определим произведение в алгебре $A_2 \otimes A_2$ согласно правилу

$$(6.3.2) \quad (c \otimes d) \circ (a \otimes b) = (ca) \otimes (bd)$$

Линейное отображение

$$(6.3.3) \quad h : A_2 \otimes A_2 \rightarrow {}^* \mathcal{L}(D; A_1 \rightarrow A_2)$$

определённое равенством

$$(6.3.4) \quad (a \otimes b) \circ f = afb \quad a, b \in A_2 \quad f \in \mathcal{L}(D; A_1 \rightarrow A_2)$$

является представлением ^{6.3} алгебры $A_2 \otimes A_2$ в модуле $\mathcal{L}(D; A_1 \rightarrow A_2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 6.1.8, отображение (6.3.4) является преобразованием модуля $\mathcal{L}(D; A_1 \rightarrow A_2)$. Для данного тензора $c \in A_2 \otimes A_2$ преобразование $h(c)$ является линейным преобразованием модуля $\mathcal{L}(D; A_1 \rightarrow A_2)$, так как

$$\begin{aligned}
 ((a \otimes b) \circ (f_1 + f_2)) \circ x &= (a(f_1 + f_2)b) \circ x = a((f_1 + f_2) \circ x)b \\
 &= a(f_1 \circ x + f_2 \circ x)b = a(f_1 \circ x)b + a(f_2 \circ x)b \\
 &= (af_1b) \circ x + (af_2b) \circ x \\
 &= (a \otimes b) \circ f_1 \circ x + (a \otimes b) \circ f_2 \circ x \\
 &= ((a \otimes b) \circ f_1 + (a \otimes b) \circ f_2) \circ x \\
 ((a \otimes b) \circ (pf)) \circ x &= (a(pf)b) \circ x = a((pf) \circ x)b \\
 &= a(p \circ f \circ x)b = pa(f \circ x)b \\
 &= p(afb) \circ x = p((a \otimes b) \circ f) \circ x \\
 &= (p((a \otimes b) \circ f)) \circ x
 \end{aligned}$$

Согласно теореме 6.3.2, отображение (6.3.4) является линейным отображением.

Пусть $f \in \mathcal{L}(D; A_1 \rightarrow A_2)$, $a \otimes b, c \otimes d \in A_2 \otimes A_2$. Согласно теореме 6.3.2

$$(a \otimes b) \circ f = afb \in \mathcal{L}(D; A_1 \rightarrow A_2)$$

Следовательно, согласно теореме 6.3.2

$$(c \otimes d) \circ ((a \otimes b) \circ f) = c(afb)d$$

Поскольку произведение в алгебре A_2 ассоциативно, то

$$(c \otimes d) \circ ((a \otimes b) \circ f) = c(afb)d = (ca)f(bd) = (ca \otimes bd) \circ f$$

Следовательно, если мы определим произведение в алгебре $A_2 \otimes A_2$ согласно равенству (6.3.2), то отображение (6.3.3) является морфизмом алгебр. Согласно определению [4]-2.1.2, отображение (6.3.4) является представлением алгебры $A_2 \otimes A_2$ в модуле $\mathcal{L}(D; A_1 \rightarrow A_2)$. \square

ТЕОРЕМА 6.3.4. Рассмотрим D -алгебру A . Определим произведение в алгебре $A \otimes A$ согласно правилу (6.3.2). Представление

$$(6.3.5) \quad h : A \otimes A \rightarrow {}^*\mathcal{L}(D; A \rightarrow A)$$

алгебры $A \otimes A$ в модуле $\mathcal{L}(D; A \rightarrow A)$, определённое равенством

$$(6.3.6) \quad (a \otimes b) \circ f = afb \quad a, b \in A \quad f \in \mathcal{L}(D; A \rightarrow A)$$

позволяет отождествить тензор $d \in A \otimes A$ с отображением $d \circ \delta \in \mathcal{L}(D; A \rightarrow A)$, где $\delta \in \mathcal{L}(D; A \rightarrow A)$ - тождественное отображение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 6.3.2, отображение $f \in \mathcal{L}(D; A \rightarrow A)$ и тензор $d \in A \otimes A$ порождают отображение

$$(6.3.7) \quad x \rightarrow (d \circ f) \circ x$$

Если мы положим $f = \delta$, $d = a \otimes b$, то равенство (6.3.7) приобретает вид

$$(6.3.8) \quad ((a \otimes b) \circ \delta) \circ x = (adb) \circ x = a(\delta \circ x)b = axb$$

^{6.3}Определение представления Ω -алгебры дано в определении [4]-2.1.2.

Если мы положим

$$(6.3.9) \quad ((a \otimes b) \circ \delta) \circ x = (a \otimes b) \circ (\delta \circ x) = (a \otimes b) \circ x$$

то сравнение равенств (6.3.8) и (6.3.9) даёт основание отождествить действие тензора $a \otimes b$ с преобразованием $(a \otimes b) \circ \delta$. \square

Из теоремы 6.3.4 следует, что отображение (6.3.4) можно рассматривать как произведение отображений $a \otimes b$ и f . Тензор $a \in A_2 \otimes A_2$ **невырожден**, если существует тензор $b \in A_2 \otimes A_2$ такой, что $a \circ b = 1 \otimes 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.3.5. Рассмотрим^{6.4} представление алгебры $A_2 \otimes A_2$ в модуле $\mathcal{L}(D; A_1 \rightarrow A_2)$. **Орбитой линейного отображения** $f \in \mathcal{L}(D; A_1 \rightarrow A_2)$ называется множество

$$(A_2 \otimes A_2) \circ f = \{g = d \circ f : d \in A_2 \otimes A_2\}$$

\square

ТЕОРЕМА 6.3.6. Рассмотрим D -алгебру A_1 и ассоциативную D -алгебру A_2 . Рассмотрим представление алгебры $A_2 \otimes A_2$ в модуле $\mathcal{L}(D; A_1; A_2)$. Отображение

$$h : A_1 \rightarrow A_2$$

порождённое отображением

$$f : A_1 \rightarrow A_2$$

имеет вид

$$(6.3.10) \quad h = (a_{s,0} \otimes a_{s,1}) \circ f = a_{s,0} f a_{s,1}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Произвольный тензор $a \in A_2 \otimes A_2$ можно представить в виде

$$a = a_{s,0} \otimes a_{s,1}$$

Согласно теореме 6.3.3, отображение (6.3.4) линейно. Это доказывает утверждение теоремы. \square

ТЕОРЕМА 6.3.7. Пусть A_2 - алгебра с единицей e . Пусть $a \in A_2 \otimes A_2$ - невырожденный тензор. Орбиты линейных отображений $f \in \mathcal{L}(D; A_1 \rightarrow A_2)$ и $g = a \circ f$ совпадают

$$(6.3.11) \quad (A_2 \otimes A_2) \circ f = (A_2 \otimes A_2) \circ g$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $h \in (A_2 \otimes A_2) \circ g$, то существует $b \in A_2 \otimes A_2$ такое, что $h = b \circ g$. Тогда

$$(6.3.12) \quad h = b \circ (a \circ f) = (b \circ a) \circ f$$

Следовательно, $h \in (A_2 \otimes A_2) \circ f$,

$$(6.3.13) \quad (A_2 \otimes A_2) \circ g \subset (A_2 \otimes A_2) \circ f$$

Так как a - невырожденный тензор, то

$$(6.3.14) \quad f = a^{-1} \circ g$$

Если $h \in (A_2 \otimes A_2) \circ f$, то существует $b \in A_2 \otimes A_2$ такое, что

$$(6.3.15) \quad h = b \circ f$$

^{6.4}Определение дано по аналогии с определением [4]-3.1.8.

Из равенств (6.3.14), (6.3.15), следует, что

$$h = b \circ (a^{-1} \circ g) = (b \circ a^{-1}) \circ g$$

Следовательно, $h \in (A_2 \otimes A_2) \circ g$,

$$(6.3.16) \quad (A_2 \otimes A_2) \circ f \subset (A_2 \otimes A_2) \circ g$$

(6.3.11) следует из равенств (6.3.13), (6.3.16). \square

Из теоремы 6.3.7 также следует, что, если $g = a \circ f$ и $a \in A_2 \otimes A_2$ - вырожденный тензор, то отношение (6.3.13) верно. Однако основной результат теоремы 6.3.7 состоит в том, что представления алгебры $A_2 \otimes A_2$ в модуле $\mathcal{L}(D; A_1 \rightarrow A_2)$ порождает отношение эквивалентности в модуле $\mathcal{L}(D; A_1 \rightarrow A_2)$. Если удачно выбрать представители каждого класса эквивалентности, то полученное множество будет множеством образующих рассматриваемого представления.^{6.5}

6.4. Линейное отображение в свободную конечно мерную ассоциативную алгебру

ТЕОРЕМА 6.4.1. Пусть A_1 - свободный D -модуль. Пусть A_2 - свободная конечно мерная ассоциативная D -алгебра. Пусть \bar{e} - базис D -модуля A_2 . Пусть \bar{I} - базис левого $A_2 \otimes A_2$ -модуля $\mathcal{L}(D; A_1 \rightarrow A_2)$.^{6.6}

6.4.1.1: Отображение

$$f : A_1 \rightarrow A_2$$

имеет следующее разложение

$$(6.4.1) \quad f = f^k \circ I_k$$

where

$$f^k = f_{s_k \cdot 0}^k \otimes f_{s_k \cdot 1}^k \quad f^k \in A_2 \otimes A_2$$

6.4.1.2: Отображение f имеет стандартное представление

$$(6.4.2) \quad f = f^{k \cdot ij} (e_i \otimes e_j) \circ I_k = f^{k \cdot ij} e_i I_k e_j$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку \bar{I} является базисом левого $A_2 \otimes A_2$ -модуля $\mathcal{L}(D; A_1 \rightarrow A_2)$, то согласно определению [4]-2.7.1 и теореме 4.1.4, существует разложение

$$(6.4.3) \quad f = f^k \circ I_k \quad f^k \in A_2 \otimes A_2$$

линейного отображения f относительно базиса \bar{I} . Согласно определению (3.3.20),

$$(6.4.4) \quad f^k = f_{s_k \cdot 0}^k \otimes f_{s_k \cdot 1}^k$$

^{6.5}Множество образующих представления определено в определении [4]-2.6.5.

^{6.6} Если D -модуль A_1 или D -модуль A_2 не является свободным D -модулем, то мы будем рассматривать множество

$$\bar{I} = \{I_k \in \mathcal{L}(D; A_1 \rightarrow A_2) : k = 1, \dots, n\}$$

линейно независимых линейных отображений. Теорема верна для любого линейного отображения

$$f : A_1 \rightarrow A_2$$

порождённого множеством линейных отображений \bar{I} .

Равенство (6.4.1) является следствием равенств (6.4.3), (6.4.4). Согласно теореме 4.5.6, стандартное представление тензора f^k имеет вид

$$(6.4.5) \quad f^k = f^{k \cdot ij} e_i \otimes e_j$$

Равенство (6.4.2) следует из равенств (6.4.1), (6.4.5). \square

ТЕОРЕМА 6.4.2. Пусть A_1 - свободный D -модуль. Пусть A_2 - свободная ассоциативная D -алгебра. Пусть \bar{I} - базис левого $A_2 \otimes A_2$ -модуля $\mathcal{L}(D; A_1 \rightarrow A_2)$. Для любого отображения $I_k \in \bar{I}$, существует множество линейных отображений

$$I_k^l : A_1 \otimes A_1 \rightarrow A_2 \otimes A_2$$

D -модуля $A_1 \otimes A_1$ в D -модуль $A_2 \otimes A_2$ таких, что

$$(6.4.6) \quad I_k \circ a \circ x = (I_k^l \circ a) \circ I_l \circ x$$

Отображение I_k^l называется **преобразованием сопряжения**.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 6.2.1, для произвольного тензора $a \in A_1 \otimes A_1$, отображение

$$(6.4.7) \quad x \rightarrow I_k \circ a \circ x$$

является линейным. Согласно утверждению 6.4.1.1, существует разложение

$$(6.4.8) \quad I_k \circ a \circ x = b^l \circ I_l \circ x \quad b^l \in A_2 \times A_2$$

Положим

$$(6.4.9) \quad b^l = I_k^l \circ a$$

Равенство (6.4.6) является следствием равенств (6.4.8), (6.4.9). Из равенств

$$\begin{aligned} (I_k^l \circ (a_1 + a_2)) \circ I_l \circ x &= I_k \circ (a_1 + a_2) \circ x \\ &= I_k \circ a_1 \circ x + I_k \circ a_2 \circ x \\ &= (I_k^l \circ a_1) \circ I_l \circ x + (I_k^l \circ a_2) \circ I_l \circ x \\ (I_k^l \circ (da)) \circ I_l \circ x &= I_k \circ (da) \circ x = I_k \circ (d(a \circ x)) \\ &= d(I_k \circ a \circ x) = d((I_k^l \circ a) \circ I_l \circ x) \\ &= (d(I_k^l \circ a)) \circ I_l \circ x \end{aligned}$$

следует, что отображение I_k^l является линейным. \square

ТЕОРЕМА 6.4.3. Пусть A_1 - свободный D -модуль. Пусть A_2, A_3 - свободные ассоциативные D -алгебры. Пусть \bar{I} - базис левого $A_2 \otimes A_2$ -модуля $\mathcal{L}(D; A_1 \rightarrow A_2)$. Пусть \bar{J} - базис левого $A_3 \otimes A_3$ -модуля $\mathcal{L}(D; A_2 \rightarrow A_3)$.

6.4.3.1: Множество отображений

$$(6.4.10) \quad \bar{\bar{K}} = \{K_{lk} : K_{lk} = J_l \circ I_k, J_l \in \bar{J}, I_k \in \bar{I}\}$$

является базисом левого $A_3 \otimes A_3$ -модуля $\mathcal{L}(D; A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_3)$.

6.4.3.2: Пусть линейное отображение

$$f : A_1 \rightarrow A_2$$

имеет разложение

$$(6.4.11) \quad f = f^k \circ I_k$$

относительно базиса \overline{I} . Пусть линейное отображение

$$g : A_2 \rightarrow A_3$$

имеет разложение

$$(6.4.12) \quad g = g^l \circ J_l$$

относительно базиса \overline{J} . Тогда линейное отображение

$$(6.4.13) \quad h = g \circ f$$

имеет разложение

$$(6.4.14) \quad h = h^{lk} \circ K_{lk}$$

относительно базиса \overline{K} , где

$$(6.4.15) \quad h^{lk} = g^l \circ (J_m^k \circ f^m)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенство

$$(6.4.16) \quad h \circ a = g \circ f \circ a = g^l \circ J_l \circ f^k \circ I_k \circ a$$

является следствием равенств (6.4.11), (6.4.12), (6.4.13). Равенство

$$(6.4.17) \quad \begin{aligned} h \circ a &= g \circ f \circ a = g^l \circ (J_l^m \circ f^k) \circ J_m \circ I_k \circ a \\ &= g^l \circ (J_l^m \circ f^k) \circ K_{mk} \circ a \end{aligned}$$

является следствием равенств (6.4.10), (6.4.16) и теоремы 6.4.2. Из равенства (6.4.17) следует, что множество отображений \overline{K} порождает левый $A_3 \otimes A_3$ -модуль

$\mathcal{L}(D; A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_3)$. Из равенства

$$a^{lk} K_{lk} = (a^{lk} \circ J_l) \circ I_k = 0$$

следует, что

$$a^{lk} \circ J_l = 0$$

и, следовательно, $a^{lk} = 0$. Следовательно, множество \overline{K} является базисом левого $A_3 \otimes A_3$ -модуля $\mathcal{L}(D; A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_3)$. \square

ТЕОРЕМА 6.4.4. Пусть A - свободная ассоциативная D -алгебра. Пусть левый $A \otimes A$ -модуль $\mathcal{L}(D; A \rightarrow A)$ порождён тождественным отображением $I_0 = \delta$. Пусть линейное отображение

$$f : A \rightarrow A$$

имеет разложение

$$(6.4.18) \quad f = f_{s \cdot 0} \otimes f_{s \cdot 1}$$

Пусть линейное отображение

$$g : A \rightarrow A$$

имеет разложение

$$(6.4.19) \quad g = g_{t \cdot 0} \otimes g_{t \cdot 1}$$

Тогда линейное отображение

$$(6.4.20) \quad h = g \circ f$$

имеет разложение

$$(6.4.21) \quad h = h_{ts \cdot 0} \otimes h_{ts \cdot 1}$$

где

$$(6.4.22) \quad \begin{aligned} h_{ts \cdot 0} &= g_{t \cdot 0} f_{s \cdot 0} \\ h_{ts \cdot 1} &= f_{s \cdot 1} g_{t \cdot 1} \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенство

$$(6.4.23) \quad \begin{aligned} h \circ a &= g \circ f \circ a \\ &= (g_{t \cdot 0} \otimes g_{t \cdot 1}) \circ (f_{s \cdot 0} \otimes f_{s \cdot 1}) \circ a \\ &= (g_{t \cdot 0} \otimes g_{t \cdot 1}) \circ (f_{s \cdot 0} a f_{s \cdot 1}) \\ &= g_{t \cdot 0} f_{s \cdot 0} a f_{s \cdot 1} g_{t \cdot 1} \end{aligned}$$

является следствием равенств (6.4.18), (6.4.19), (6.4.20). Равенство (6.4.22) является следствием равенства (6.4.23). \square

ТЕОРЕМА 6.4.5. Пусть $\bar{\bar{e}}_1$ - базис свободного конечно мерного D -модуля A_1 . Пусть $\bar{\bar{e}}_2$ - базис свободной конечно мерной ассоциативной D -алгебры A_2 . Пусть C_{kl}^p - структурные константы алгебры A_2 . Пусть $\bar{\bar{I}}$ - базис левого $A_2 \otimes A_2$ -модуля $\mathcal{L}(D; A_1 \rightarrow A_2)$ и $I_{k \cdot i}^j$ - координаты отображения I_k относительно базисов $\bar{\bar{e}}_1$ и $\bar{\bar{e}}_2$. Координаты f_l^k отображения $f \in \mathcal{L}(D; A_1 \rightarrow A_2)$ и его стандартные компоненты $f^{k \cdot ij}$ связаны равенством

$$(6.4.24) \quad f_l^k = f^{k \cdot ij} I_{k \cdot l}^m C_{im}^p C_{pj}^k$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Относительно базисов $\bar{\bar{e}}_1$ и $\bar{\bar{e}}_2$, линейные отображения f и I_k имеют вид

$$(6.4.25) \quad f \circ x = f_j^i x^j e_{2 \cdot i}$$

$$(6.4.26) \quad I_k \circ x = I_{k \cdot j}^i x^j e_{2 \cdot i}$$

Равенство

$$(6.4.27) \quad \begin{aligned} f_l^k x^l e_{2 \cdot k} &= f^{k \cdot ij} e_{2 \cdot i} I_{k \cdot l}^m x^l e_{2 \cdot m} \bar{\bar{e}}_{2 \cdot j} \\ &= f^{k \cdot ij} I_{k \cdot l}^m x^l C_{im}^p C_{pj}^k e_{2 \cdot k} \end{aligned}$$

является следствием равенств (6.4.2), (6.4.25), (6.4.26). Так как векторы $\bar{\bar{e}}_{2 \cdot k}$ линейно независимы и x^i произвольны, то равенство (6.4.24) следует из равенства (6.4.27). \square

ТЕОРЕМА 6.4.6. Пусть D является полем. Пусть $\bar{\bar{e}}_1$ - базис свободной конечно мерной D -алгебры A_1 . Пусть $\bar{\bar{e}}_2$ - базис свободной конечно мерной ассоциативной D -алгебры A_2 . Пусть C_{kl}^p - структурные константы алгебры A_2 . Рассмотрим матрицу

$$(6.4.28) \quad B = (C_{m \cdot ij}^k) = (C_{im}^p C_{pj}^k)$$

строки которой пронумерованы индексом \cdot^k_m и столбцы пронумерованы индексом \cdot^{ij} . Если матрица B невырождена, то для заданных координат линейного преобразования g^l_k и для отображения $f = \delta$, система линейных уравнений (6.4.24) относительно стандартных компонент этого преобразования g^{kr} имеет единственное решение.

Если матрица B вырождена, то условием существования решения системы линейных уравнений (6.4.24) является равенство

$$(6.4.29) \quad \text{rank} \begin{pmatrix} C^{\cdot k}_{\cdot m \cdot ij} & g^k_m \end{pmatrix} = \text{rank} C$$

В этом случае система линейных уравнений (6.4.24) имеет бесконечно много решений и существует линейная зависимость между величинами g^k_m .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение теоремы является следствием теории линейных уравнений над полем. \square

ТЕОРЕМА 6.4.7. Пусть A - свободная конечно мерная ассоциативная алгебра над полем D . Пусть \bar{e} - базис алгебры A над полем D . Пусть C^p_{kl} - структурные константы алгебры A . Пусть матрица (6.4.28) вырождена. Пусть линейное отображение $f \in \mathcal{L}(D; A \rightarrow A)$ невырождено. Если координаты линейных преобразований f и g удовлетворяют равенству

$$(6.4.30) \quad \text{rank} \begin{pmatrix} C^{\cdot k}_{\cdot m \cdot ij} & g^k_m & f^k_m \end{pmatrix} = \text{rank} C$$

то система линейных уравнений

$$(6.4.31) \quad g^k_l = f^m_l g^{ij} C^p_{im} C^k_{pj}$$

имеет бесконечно много решений.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно равенству (6.4.30) и теореме 6.4.6, система линейных уравнений

$$(6.4.32) \quad f^k_l = f^{ij} C^p_{il} C^k_{pj}$$

имеет бесконечно много решений, соответствующих линейному отображению

$$(6.4.33) \quad f = f^{ij} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j$$

Согласно равенству (6.4.30) и теореме 6.4.6, система линейных уравнений

$$(6.4.34) \quad g^k_l = g^{ij} C^p_{il} C^k_{pj}$$

имеет бесконечно много решений, соответствующих линейному отображению

$$(6.4.35) \quad g = g^{ij} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_j$$

Отображения f и g порождены отображением δ . Согласно теореме 6.3.7, отображение f порождает отображение g . Это доказывает утверждение теоремы. \square

ТЕОРЕМА 6.4.8. Пусть A - свободная конечно мерная ассоциативная алгебра над полем D . Представление алгебры $A \otimes A$ в алгебре $\mathcal{L}(D; A \rightarrow A)$ имеет конечный базис \bar{I} .

6.4.8.1: Линейное отображение $f \in \mathcal{L}(D; A \rightarrow A)$ имеет вид

$$(6.4.36) \quad f = (a_{k \cdot s_k \cdot 0} \otimes a_{k \cdot s_k \cdot 1}) \circ I_k = \sum_k a_{k \cdot s_k \cdot 0} I_k a_{k \cdot s_k \cdot 1}$$

6.4.8.2: Его стандартное представление имеет вид

$$(6.4.37) \quad f = a^{k \cdot ij} (e_i \otimes e_j) \circ I_k = a^{k \cdot ij} e_i I_k e_j$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 6.4.7 следует, что если матрица B вырождена и отображение f удовлетворяет равенству

$$(6.4.38) \quad \text{rank} \begin{pmatrix} C^{k \cdot m \cdot ij} & f_m^k \end{pmatrix} = \text{rank } C$$

то отображение f порождает то же самое множество отображений, что порождено отображением δ . Следовательно, для того, чтобы построить базис представления алгебры $A \otimes A$ в модуле $\mathcal{L}(D; A \rightarrow A)$, мы должны выполнить следующее построение.

Множество решений системы уравнений (6.4.31) порождает свободный подмодуль \mathcal{L} модуля $\mathcal{L}(D; A \rightarrow A)$. Мы строим базис $(\bar{h}_1, \dots, \bar{h}_k)$ подмодуля \mathcal{L} . Затем дополняем этот базис линейно независимыми векторами $\bar{h}_{k+1}, \dots, \bar{h}_m$, которые не принадлежат подмодулю \mathcal{L} , таким образом, что множество векторов $\bar{h}_1, \dots, \bar{h}_m$ является базисом модуля $\mathcal{L}(D; A \rightarrow A)$. Множество орбит $(A \otimes A) \circ \delta, (A \otimes A) \circ \bar{h}_{k+1}, \dots, (A \otimes A) \circ \bar{h}_m$ порождает модуль $\mathcal{L}(D; A \rightarrow A)$. Поскольку множество орбит конечно, мы можем выбрать орбиты так, чтобы они не пересекались. Для каждой орбиты мы можем выбрать представитель, порождающий эту орбиту. \square

ПРИМЕР 6.4.9. Для поля комплексных чисел алгебра $\mathcal{L}(R; C \rightarrow C)$ имеет базис

$$\begin{aligned} I_0 \circ z &= z \\ I_1 \circ z &= \bar{z} \end{aligned}$$

Для алгебры кватернионов алгебра $\mathcal{L}(R; H \rightarrow H)$ имеет базис

$$I_0 \circ z = z$$

\square

6.5. Линейное отображение в неассоциативную алгебру

Так как произведение неассоциативно, мы можем предположить, что действие $a, b \in A$ на отображение f может быть представлено либо в виде $a(fb)$, либо в виде $(af)b$. Однако это предположение приводит нас к довольно сложной структуре линейного отображения. Чтобы лучше представить насколько сложна структура линейного отображения, мы начнём с рассмотрения левого и правого сдвигов в неассоциативной алгебре.

ТЕОРЕМА 6.5.1. Пусть

$$(6.5.1) \quad l(a) \circ x = ax$$

отображение левого сдвига. Тогда

$$(6.5.2) \quad l(a) \circ l(b) = l(ab) - (a, b)_1$$

где мы определили линейное отображение

$$(a, b)_1 \circ x = (a, b, x)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенств (5.1.2), (6.5.1) следует

$$\begin{aligned}
 (6.5.3) \quad & (l(a) \circ l(b)) \circ x = l(a) \circ (l(b) \circ x) \\
 & = a(bx) = (ab)x - (a, b, x) \\
 & = l(ab) \circ x - (a, b)_1 \circ x
 \end{aligned}$$

Равенство (6.5.2) следует из равенства (6.5.3). \square

ТЕОРЕМА 6.5.2. Пусть

$$(6.5.4) \quad r(a) \circ x = xa$$

отображение правого сдвига. Тогда

$$(6.5.5) \quad r(a) \circ r(b) = r(ba) + (b, a)_2$$

где мы определили линейное отображение

$$(b, a)_2 \circ x = (x, b, a)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенств (5.1.2), (6.5.4) следует

$$\begin{aligned}
 (6.5.6) \quad & (r(a) \circ r(b)) \circ x = r(a) \circ (r(b) \circ x) \\
 & = (xb)a = x(ba) + (x, b, a) \\
 & = r(ba) \circ x + (x, b, a)
 \end{aligned}$$

Равенство (6.5.5) следует из равенства (6.5.6). \square

Пусть

$$f : A \rightarrow A \quad f = (ax)b$$

линейное отображение алгебры A . Согласно теореме 6.1.8, отображение

$$g : A \rightarrow A \quad g = (cf)d$$

также линейное отображение. Однако неочевидно, можем ли мы записать отображение g в виде суммы слагаемых вида $(ax)b$ и $a(xb)$.

Если A - свободная конечно мерная алгебра, то мы можем предположить, что линейное отображение имеет стандартное представление в виде ^{6.7}

$$(6.5.8) \quad f \circ x = f^{ij} (\bar{e}_i x) \bar{e}_j$$

В этом случае мы можем применить теорему 6.4.8 для отображений в неассоциативную алгебру.

^{6.7}Выбор произволен. Мы можем рассмотреть стандартное представление в виде

$$f \circ x = f^{ij} \bar{e}_i (x \bar{e}_j)$$

Тогда равенство (6.5.11) имеет вид

$$(6.5.7) \quad g_l^k = f_l^m g^{ij} C_{2 \cdot ip}^k C_{2 \cdot mj}^p$$

Я выбрал выражение (6.5.8) так как порядок сомножителей соответствует порядку, выбранному в теореме 6.4.8.

ТЕОРЕМА 6.5.3. Пусть \bar{e}_1 - базис свободной конечно мерной D -алгебры A_1 . Пусть \bar{e}_2 - базис свободной конечно мерной неассоциативной D -алгебры A_2 . Пусть $C_{2 \cdot kl}^p$ - структурные константы алгебры A_2 . Пусть отображение

$$(6.5.9) \quad g = a \circ f$$

порождённое отображением $f \in \mathcal{L}(D; A_1 \rightarrow A_2)$ посредством тензора $a \in A_2 \otimes A_2$, имеет стандартное представление

$$(6.5.10) \quad g = a^{ij}(\bar{e}_i \otimes \bar{e}_j) \circ f = a^{ij}(\bar{e}_i f) \bar{e}_j$$

Координаты отображения (6.5.9) и его стандартные компоненты связаны равенством

$$(6.5.11) \quad g_l^k = f_l^m g^{ij} C_{2 \cdot im}^p C_{2 \cdot pj}^k$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Относительно базисов \bar{e}_1 и \bar{e}_2 , линейные отображения f и g имеют вид

$$(6.5.12) \quad f \circ x = f_j^i x^j \bar{e}_{2 \cdot i}$$

$$(6.5.13) \quad g \circ x = g_j^i x^j \bar{e}_{2 \cdot i}$$

Из равенств (6.5.12), (6.5.13), (6.5.10) следует

$$(6.5.14) \quad \begin{aligned} g_l^k x^l \bar{e}_{2 \cdot k} &= a^{ij}(\bar{e}_{2 \cdot i} (f_l^m x^l \bar{e}_{2 \cdot m})) \bar{e}_{2 \cdot j} \\ &= a^{ij} f_l^m x^l C_{2 \cdot im}^p C_{2 \cdot pj}^k \bar{e}_{2 \cdot k} \end{aligned}$$

Так как векторы $\bar{e}_{2 \cdot k}$ линейно независимы и x^i произвольны, то равенство (6.5.11) следует из равенства (6.5.14). \square

ТЕОРЕМА 6.5.4. Пусть A - свободная конечно мерная неассоциативная алгебра над кольцом D . Представление алгебры $A \otimes A$ в алгебре $\mathcal{L}(D; A \rightarrow A)$ имеет конечный базис \bar{I} .

(1) Линейное отображение $f \in \mathcal{L}(D; A \rightarrow A)$ имеет вид

$$(6.5.15) \quad f = (a_{k \cdot s_k \cdot 0} \otimes a_{k \cdot s_k \cdot 1}) \circ I_k = (a_{k \cdot s_k \cdot 0} I_k) a_{k \cdot s_k \cdot 1}$$

(2) Его стандартное представление имеет вид

$$(6.5.16) \quad f = a^{k \cdot ij}(\bar{e}_i \otimes \bar{e}_j) \circ I_k = a^{k \cdot ij}(\bar{e}_i I_k) \bar{e}_j$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим матрицу (6.4.28). Если матрица \mathcal{B} невырождена, то для заданных координат линейного преобразования g_k^l и для отображения $f = \delta$, система линейных уравнений (6.5.11) относительно стандартных компонент этого преобразования g^{kr} имеет единственное решение. Если матрица \mathcal{B} вырождена, то согласно теореме 6.4.8 существует конечный базис \bar{I} , порождающий множество линейных отображений. \square

В отличие от случая ассоциативной алгебры множество генераторов I в теореме 6.5.4 не является минимальным. Из равенства (6.5.2) следует, что неверно равенство (6.3.12). Следовательно, орбиты отображений I_k не порождают отношения эквивалентности в алгебре $L(A; A)$. Так как мы рассматриваем только отображения вида $(a I_k) b$, то возможно, что при $k \neq l$ отображение I_k порождает отображение I_l , если рассмотреть все возможные операции в алгебре A . Поэтому множество образующих I_k неассоциативной алгебры A не играет такой критической роли как отображение сопряжения в поле комплексных

чисел. Ответ на вопрос насколько важно отображение I_k в неассоциативной алгебре требует дополнительного исследования.

6.6. Полилинейное отображение в ассоциативную алгебру

ТЕОРЕМА 6.6.1. Пусть A_1, \dots, A_n, A - ассоциативные D -алгебры. Пусть

$$f_i \in \mathcal{L}(D; A_i \rightarrow A) \quad i = 1, \dots, n$$

$$a_j \in A \quad j = 0, \dots, n$$

Для заданной перестановки σ n переменных отображение

$$\begin{aligned} & ((a_0, \dots, a_n, \sigma) \circ (f_1, \dots, f_n)) \circ (x_1, \dots, x_n) \\ (6.6.1) \quad &= (a_0 \sigma(f_1) a_1 \dots a_{n-1} \sigma(f_n) a_n) \circ (x_1, \dots, x_n) \\ &= a_0 \sigma(f_1 \circ x_1) a_1 \dots a_{n-1} \sigma(f_n \circ x_n) a_n \end{aligned}$$

является n -линейным отображением в алгебру A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение теоремы следует из цепочек равенств

$$\begin{aligned} & ((a_0, \dots, a_n, \sigma) \circ (f_1, \dots, f_n)) \circ (x_1, \dots, x_i + y_i, \dots, x_n) \\ &= a_0 \sigma(f_1 \circ x_1) a_1 \dots \sigma(f_i \circ (x_i + y_i)) \dots a_{n-1} \sigma(f_n \circ x_n) a_n \\ &= a_0 \sigma(f_1 \circ x_1) a_1 \dots \sigma(f_i \circ x_i + f_i \circ y_i) \dots a_{n-1} \sigma(f_n \circ x_n) a_n \\ &= a_0 \sigma(f_1 \circ x_1) a_1 \dots \sigma(f_i \circ x_i) \dots a_{n-1} \sigma(f_n \circ x_n) a_n \\ &+ a_0 \sigma(f_1 \circ x_1) a_1 \dots \sigma(f_i \circ y_i) \dots a_{n-1} \sigma(f_n \circ x_n) a_n \\ &= ((a_0, \dots, a_n, \sigma) \circ (f_1, \dots, f_n)) \circ (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \\ &+ ((a_0, \dots, a_n, \sigma) \circ (f_1, \dots, f_n)) \circ (x_1, \dots, y_i, \dots, x_n) \\ &((a_0, \dots, a_n, \sigma) \circ (f_1, \dots, f_n)) \circ (x_1, \dots, px_i, \dots, x_n) \\ &= a_0 \sigma(f_1 \circ x_1) a_1 \dots \sigma(f_i \circ (px_i)) \dots a_{n-1} \sigma(f_n \circ x_n) a_n \\ &= a_0 \sigma(f_1 \circ x_1) a_1 \dots \sigma(p(f_i \circ x_i)) \dots a_{n-1} \sigma(f_n \circ x_n) a_n \\ &= p(a_0 \sigma(f_1 \circ x_1) a_1 \dots \sigma(f_i \circ x_i) \dots a_{n-1} \sigma(f_n \circ x_n) a_n) \\ &= p(((a_0, \dots, a_n, \sigma) \circ (f_1, \dots, f_n)) \circ (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)) \end{aligned}$$

□

В равенстве (6.6.1), также как и в других выражениях полилинейного отображения, принято соглашение, что отображение f_i имеет своим аргументом переменную x_i .

ТЕОРЕМА 6.6.2. Пусть A_1, \dots, A_n, A - ассоциативные D -алгебры. Для заданного семейства отображений

$$f_i \in \mathcal{L}(D; A_i \rightarrow A) \quad i = 1, \dots, n$$

отображение

$$h : A^{n+1} \rightarrow \mathcal{L}(D; A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow A)$$

определённое равенством

$$(a_0, \dots, a_n, \sigma) \circ (f_1, \dots, f_n) = a_0 \sigma(f_1) a_1 \dots a_{n-1} \sigma(f_n) a_n$$

является $n+1$ -линейным отображением в D -модуль $\mathcal{L}(D; A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение теоремы следует из цепочек равенств

$$\begin{aligned}
& ((a_0, \dots, a_i + b_i, \dots, a_n, \sigma) \circ (f_1, \dots, f_n)) \circ (x_1, \dots, x_n) \\
&= a_0 \sigma(f_1 \circ x_1) a_1 \dots (a_i + b_i) \dots a_{n-1} \sigma(f_n \circ x_n) a_n \\
&= a_0 \sigma(f_1 \circ x_1) a_1 \dots a_i \dots a_{n-1} \sigma(f_n \circ x_n) a_n + a_0 \sigma(f_1 \circ x_1) a_1 \dots b_i \dots a_{n-1} \sigma(f_n \circ x_n) a_n \\
&= ((a_0, \dots, a_i, \dots, a_n, \sigma) \circ (f_1, \dots, f_n)) \circ (x_1, \dots, x_n) \\
&+ ((a_0, \dots, b_i, \dots, a_n, \sigma) \circ (f_1, \dots, f_n)) \circ (x_1, \dots, x_n) \\
&= ((a_0, \dots, a_i, \dots, a_n, \sigma) \circ (f_1, \dots, f_n) + (a_0, \dots, b_i, \dots, a_n, \sigma) \circ (f_1, \dots, f_n)) \circ (x_1, \dots, x_n) \\
&= ((a_0, \dots, p a_i, \dots, a_n, \sigma) \circ (f_1, \dots, f_n)) \circ (x_1, \dots, x_n) \\
&= a_0 \sigma(f_1 \circ x_1) a_1 \dots p a_i \dots a_{n-1} \sigma(f_n \circ x_n) a_n \\
&= p(a_0 \sigma(f_1 \circ x_1) a_1 \dots a_i \dots a_{n-1} \sigma(f_n \circ x_n) a_n) \\
&= p(((a_0, \dots, a_i, \dots, a_n, \sigma) \circ (f_1, \dots, f_n)) \circ (x_1, \dots, x_n)) \\
&= (p((a_0, \dots, a_i, \dots, a_n, \sigma) \circ (f_1, \dots, f_n))) \circ (x_1, \dots, x_n)
\end{aligned}$$

□

ТЕОРЕМА 6.6.3. Пусть A_1, \dots, A_n, A - ассоциативные D -алгебры. Для заданного семейства отображений

$$f_i \in \mathcal{L}(D; A_i \rightarrow A) \quad i = 1, \dots, n$$

существует линейное отображение

$$h : A^{\otimes n+1} \times S_n \rightarrow \mathcal{L}(D; A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow A)$$

определённое равенством

$$\begin{aligned}
(6.6.2) \quad & (a_0 \otimes \dots \otimes a_n, \sigma) \circ (f_1, \dots, f_n) = (a_0, \dots, a_n, \sigma) \circ (f_1, \dots, f_n) \\
&= a_0 \sigma(f_1) a_1 \dots a_{n-1} \sigma(f_n) a_n
\end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение теоремы является следствием теорем 4.5.4, 6.6.2. □

ТЕОРЕМА 6.6.4. Пусть A_1, \dots, A_n, A - ассоциативные D -алгебры. Для заданного тензора $a \in A^{\otimes n+1}$ и заданной перестановки $\sigma \in S_n$ отображение

$$h : \prod_{i=1}^n \mathcal{L}(D; A_i \rightarrow A) \rightarrow \mathcal{L}(D; A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow A)$$

определённое равенством

$$(a_0 \otimes \dots \otimes a_n, \sigma) \circ (f_1, \dots, f_n) = a_0 \sigma(f_1) a_1 \dots a_{n-1} \sigma(f_n) a_n$$

является n -линейным отображением в D -модуль $\mathcal{L}(D; A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение теоремы следует из цепочек равенств

$$\begin{aligned}
& ((a_0 \otimes \dots \otimes a_n, \sigma) \circ (f_1, \dots, f_i + g_i, \dots, f_n)) \circ (x_1, \dots, x_n) \\
&= (a_0 \sigma(f_1) a_1 \dots \sigma(f_i + g_i) \dots a_{n-1} \sigma(f_n) a_n) \circ (x_1, \dots, x_n) \\
&= a_0 \sigma(f_1 \circ x_1) a_1 \dots \sigma((f_i + g_i) \circ x_i) \dots a_{n-1} \sigma(f_n \circ x_n) a_n \\
&= a_0 \sigma(f_1 \circ x_1) a_1 \dots \sigma(f_i \circ x_i + g_i \circ x_i) \dots a_{n-1} \sigma(f_n \circ x_n) a_n \\
&= a_0 \sigma(f_1 \circ x_1) a_1 \dots \sigma(f_i \circ x_i) \dots a_{n-1} \sigma(f_n \circ x_n) a_n \\
&+ a_0 \sigma(f_1 \circ x_1) a_1 \dots \sigma(g_i \circ x_i) \dots a_{n-1} \sigma(f_n \circ x_n) a_n \\
&= (a_0 \sigma(f_1) a_1 \dots \sigma(f_i) \dots a_{n-1} \sigma(f_n) a_n) \circ (x_1, \dots, x_n) \\
&+ (a_0 \sigma(f_1) a_1 \dots \sigma(g_i) \dots a_{n-1} \sigma(f_n) a_n) \circ (x_1, \dots, x_n) \\
&= ((a_0 \otimes \dots \otimes a_n, \sigma) \circ (f_1, \dots, f_i, \dots, f_n)) \circ (x_1, \dots, x_n) \\
&+ ((a_0 \otimes \dots \otimes a_n, \sigma) \circ (f_1, \dots, g_i, \dots, f_n)) \circ (x_1, \dots, x_n) \\
&= ((a_0 \otimes \dots \otimes a_n, \sigma) \circ (f_1, \dots, f_i, \dots, f_n)) \\
&+ ((a_0 \otimes \dots \otimes a_n, \sigma) \circ (f_1, \dots, g_i, \dots, f_n)) \circ (x_1, \dots, x_n) \\
&= ((a_0 \otimes \dots \otimes a_n, \sigma) \circ (f_1, \dots, p f_i, \dots, f_n)) \circ (x_1, \dots, x_n) \\
&= (a_0 \sigma(f_1) a_1 \dots \sigma(p f_i) \dots a_{n-1} \sigma(f_n) a_n) \circ (x_1, \dots, x_n) \\
&= a_0 \sigma(f_1 \circ x_1) a_1 \dots \sigma((p f_i) \circ x_i) \dots a_{n-1} \sigma(f_n \circ x_n) a_n \\
&= a_0 \sigma(f_1 \circ x_1) a_1 \dots \sigma(p(f_i \circ x_i)) \dots a_{n-1} \sigma(f_n \circ x_n) a_n \\
&= p(a_0 \sigma(f_1 \circ x_1) a_1 \dots \sigma(f_i \circ x_i) \dots a_{n-1} \sigma(f_n \circ x_n) a_n) \\
&= p(((a_0 \otimes \dots \otimes a_n, \sigma) \circ (f_1, \dots, f_i, \dots, f_n)) \circ (x_1, \dots, x_n)) \\
&= (p((a_0 \otimes \dots \otimes a_n, \sigma) \circ (f_1, \dots, f_i, \dots, f_n))) \circ (x_1, \dots, x_n)
\end{aligned}$$

□

ТЕОРЕМА 6.6.5. Пусть A_1, \dots, A_n, A - ассоциативные D -алгебры. Для заданного тензора $a \in A^{\otimes n+1}$ и заданной перестановки $\sigma \in S_n$ существует линейное отображение

$$h : \mathcal{L}(D; A_1 \rightarrow A) \otimes \dots \otimes \mathcal{L}(D; A_n \rightarrow A) \rightarrow \mathcal{L}(D; A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow A)$$

определённое равенством

$$(6.6.3) \quad (a_0 \otimes \dots \otimes a_n, \sigma) \circ (f_1 \otimes \dots \otimes f_n) = (a_0 \otimes \dots \otimes a_n, \sigma) \circ (f_1, \dots, f_n)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение теоремы является следствием теорем 4.5.4, 6.6.4. □

ТЕОРЕМА 6.6.6. Пусть A - ассоциативная D -алгебра. Полилинейное отображение

$$(6.6.4) \quad f : A^n \rightarrow A, a = f \circ (a_1, \dots, a_n)$$

порождённое отображениями $I_{s \cdot 1}, \dots, I_{s \cdot n} \in \mathcal{L}(D; A \rightarrow A)$, имеет вид

$$(6.6.5) \quad a = f_{s \cdot 0}^n \sigma_s(I_{s \cdot 1} \circ a_1) f_{s \cdot 1}^n \dots \sigma_s(I_{s \cdot n} \circ a_n) f_{s \cdot n}^n$$

где σ_s - перестановка множества переменных $\{a_1, \dots, a_n\}$

$$\sigma_s = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \\ \sigma_s(a_1) & \dots & \sigma_s(a_n) \end{pmatrix}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы докажем утверждение индукцией по n .

При $n = 1$ доказываемое утверждение является следствием утверждения 6.4.8.1. При этом мы можем отождествить 6.8

$$f_{s,p}^1 = f_{s,p} \quad p = 0, 1$$

Допустим, что утверждение теоремы справедливо при $n = k - 1$. Тогда отображение (6.6.4) можно представить в виде

$$\begin{array}{ccc} A^k & \xrightarrow{f} & A \\ & \searrow g \circ a_k & \uparrow h \\ & & A^{k-1} \end{array}$$

$$a = f \circ (a_1, \dots, a_k) = (g \circ a_k) \circ (a_1, \dots, a_{k-1})$$

Согласно предположению индукции полилинейное отображение h имеет вид

$$a = h_{t,0}^{k-1} \sigma_t(I_{1,t} \circ a_1) h_{t,1}^{k-1} \dots \sigma_t(I_{k-1,t} \circ a_{k-1}) h_{t,k-1}^{k-1}$$

Согласно построению $h = g \circ a_k$. Следовательно, выражения $h_{t,p}$ являются функциями a_k . Поскольку $g \circ a_k$ - линейная функция a_k , то только одно выражение $h_{t,p}$ является линейной функцией переменной a_k , и остальные выражения $h_{t,q}$ не зависят от a_k .

Не нарушая общности, положим $p = 0$. Согласно равенству (6.3.10) для заданного t

$$h_{t,0}^{k-1} = g_{tr,0} I_{k,r} \circ a_k g_{tr,1}$$

Положим $s = tr$ и определим перестановку σ_s согласно правилу

$$\sigma_s = \sigma_{tr} = \begin{pmatrix} a_k & a_1 & \dots & a_{k-1} \\ a_k & \sigma_t(a_1) & \dots & \sigma_t(a_{k-1}) \end{pmatrix}$$

Положим

$$\begin{aligned} f_{tr,q+1}^k &= h_{t,q}^{k-1} \quad q = 1, \dots, k-1 \\ f_{tr,q}^k &= g_{tr,q} \quad q = 0, 1 \end{aligned}$$

Мы доказали шаг индукции. □

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.6.7. Выражение $f s \cdot p^n$ в равенстве (6.6.5) называется компонентой полилинейного отображения f . □

^{6.8}В представлении (6.6.5) мы будем пользоваться следующими правилами.

- Если область значений какого-либо индекса - это множество, состоящее из одного элемента, мы будем опускать соответствующий индекс.
- Если $n = 1$, то σ_s - тождественное преобразование. Это преобразование можно не указывать в выражении.

ТЕОРЕМА 6.6.8. Рассмотрим D -алгебру A . Линейное отображение

$$h : A^{\otimes n+1} \times S_n \rightarrow {}^*\mathcal{L}(D; A^n \rightarrow A)$$

определённое равенством

$$(6.6.6) \quad (a_0 \otimes \dots \otimes a_n, \sigma) \circ (f_1 \otimes \dots \otimes f_n) = a_0 \sigma(f_1) a_1 \dots a_{n-1} \sigma(f_n) a_n$$

$$a_0, \dots, a_n \in A \quad \sigma \in S_n \quad f_1, \dots, f_n \in \mathcal{L}(D; A_n \rightarrow A)$$

является представлением ^{6.9} алгебры $A^{\otimes n+1} \times S^n$ в D -модуле $\mathcal{L}(D; A^n \rightarrow A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теоремам 6.4.8, 6.6.6, n -линейное отображение можно представить в виде суммы слагаемых (6.6.1), где f_i , $i = 1, \dots, n$, генераторы представления (6.3.3). Запишем слагаемое s выражения (6.6.5) в виде

$$(6.6.7) \quad b_1 \sigma(I_{1 \cdot s} \circ x_1) c_1 b_2 \dots c_{n-1} b_n \sigma(I_{n \cdot s} \circ x_n) c_n$$

где

$$b_1 = f_{s \cdot 0}^n \quad b_2 = \dots = b_n = e \quad c_1 = f_{s \cdot 1}^n \quad \dots \quad c_n = f_{s \cdot n}^n$$

Положим в равенстве (6.6.7)

$$f_i = \sigma^{-1}(b_i) I_{i \cdot s} \sigma^{-1}(c_i) \quad i = 1, \dots, n$$

Следовательно, согласно теореме 6.6.3, отображение (6.6.6) является преобразованием модуля $\mathcal{L}(D; A^n \rightarrow A)$. Для данного тензора $c \in A^{\otimes n+1}$ и заданной перестановки $\sigma \in S_n$, преобразование $h(c, \sigma)$ является линейным преобразованием модуля $\mathcal{L}(D; A^n \rightarrow A)$ согласно теореме 6.6.5. Согласно теореме 6.6.3, отображение (6.6.6) является линейным отображением. Согласно определению [4]-2.1.2, отображение (6.6.6) является представлением алгебры $A^{\otimes n+1} \times S^n$ в модуле $\mathcal{L}(D; A^n \rightarrow A)$. \square

ТЕОРЕМА 6.6.9. Рассмотрим D -алгебру A . Представление

$$h : A^{\otimes n+1} \times S_n \rightarrow {}^*\mathcal{L}(D; A^n \rightarrow A)$$

алгебры $A^{\otimes n+1}$ в модуле $\mathcal{L}(D; A^n \rightarrow A)$, определённое равенством (6.6.6) позволяет отождествить тензор $d \in A^{\otimes n+1}$ и перестановку $\sigma \in S^n$ с отображением

$$(6.6.8) \quad (d, \sigma) \circ (f_1, \dots, f_n) \quad f_i = \delta \in \mathcal{L}(D; A \rightarrow A)$$

где $\delta \in \mathcal{L}(D; A \rightarrow A)$ - тождественное отображение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если в равенстве (6.6.2) мы положим $f_i = \delta$, $d = a_0 \otimes \dots \otimes a_n$, то равенство (6.6.2) приобретает вид

$$(6.6.9) \quad ((a_0 \otimes \dots \otimes a_n, \sigma) \circ (\delta, \dots, \delta)) \circ (x_1, \dots, x_n) = a_0 (\delta \circ x_1) \dots (\delta \circ x_n) a_n$$

$$= a_0 x_1 \dots x_n a_n$$

^{6.9}Определение представления Ω -алгебры дано в определении [4]-2.1.2.

Если мы положим

$$\begin{aligned}
 & ((a_0 \otimes \dots \otimes a_n, \sigma) \circ (\delta, \dots, \delta)) \circ (x_1, \dots, x_n) \\
 (6.6.10) \quad &= (a_0 \otimes \dots \otimes a_n, \sigma) \circ (\delta \circ x_1, \dots, \delta \circ x_n) \\
 &= (a_0 \otimes \dots \otimes a_n, \sigma) \circ (x_1, \dots, x_n)
 \end{aligned}$$

то сравнение равенств (6.6.9) и (6.6.10) даёт основание отождествить действие тензора $d = a_0 \otimes \dots \otimes a_n$ и перестановки $\sigma \in S^n$ с отображением (6.6.8). \square

Вместо записи $(a_0 \otimes \dots \otimes a_n, \sigma)$ мы также будем пользоваться записью

$$a_0 \otimes_{\sigma(1)} \dots \otimes_{\sigma(n)} a_n$$

если мы хотим явно указать какой аргумент становится на соответствующее место. Например, следующие выражения эквивалентны

$$\begin{aligned}
 (a_0 \otimes a_1 \otimes a_2 \otimes a_3, (2, 1, 3)) \circ (x_1, x_2, x_3) &= a_0 x_2 a_1 x_1 a_2 x_3 a_3 \\
 (a_0 \otimes_2 a_1 \otimes_1 a_2 \otimes_3 a_3) \circ (x_1, x_2, x_3) &= a_0 x_2 a_1 x_1 a_2 x_3 a_3
 \end{aligned}$$

6.7. Полилинейное отображение в свободную конечно мерную ассоциативную алгебру

ТЕОРЕМА 6.7.1. Пусть A - свободная конечно мерная ассоциативная алгебра над кольцом D . Пусть \bar{I} - базис алгебры $\mathcal{L}(D; A \rightarrow A)$. Пусть \bar{e} - базис алгебры A над кольцом D . **Стандартное представление полилинейного отображения в ассоциативную алгебру имеет вид**

$$(6.7.1) \quad f \circ (a_1, \dots, a_n) = f_{t \cdot k_1 \dots k_n}^{i_0 \dots i_n} \bar{e}_{i_0} \sigma_t(I_{k_1} \circ a_1) \bar{e}_{i_1} \dots \sigma_t(I_{k_n} \circ a_n) \bar{e}_{i_n}$$

Индекс t нумерует всевозможные перестановки σ_t множества переменных $\{a_1, \dots, a_n\}$. Выражение $f_{t \cdot k_1 \dots k_n}^{i_0 \dots i_n}$ в равенстве (6.7.1) называется **стандартной компонентой полилинейного отображения f** .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы изменим индекс s в равенстве (6.6.5) таким образом, чтобы сгруппировать слагаемые с одинаковым набором генераторов I_k . Выражение (6.6.5) примет вид

$$(6.7.2) \quad a = f_{k_1 \dots k_n \cdot s \cdot 0}^n \sigma_s(I_{k_1} \circ a_1) f_{k_1 \dots k_n \cdot s \cdot 1}^n \dots \sigma_s(I_{k_n} \circ a_n) f_{k_1 \dots k_n \cdot s \cdot n}^n$$

Мы предполагаем, что индекс s принимает значения, зависящие от k_1, \dots, k_n . Компоненты полилинейного отображения f имеют разложение

$$(6.7.3) \quad f_{k_1 \dots k_n \cdot s \cdot p}^n = \bar{e}_i f_{k_1 \dots k_n \cdot s \cdot p}^{n i}$$

относительно базиса \bar{e} . Если мы подставим (6.7.3) в (6.6.5), мы получим

$$(6.7.4) \quad a = f_{k_1 \dots k_n \cdot s \cdot 0}^{n j_1} \bar{e}_{j_1} \sigma_s(I_{k_1} \circ a_1) f_{k_1 \dots k_n \cdot s \cdot 1}^{n j_2} \bar{e}_{j_2} \dots \sigma_s(I_{k_n} \circ a_n) f_{k_1 \dots k_n \cdot s \cdot n}^{n j_n} \bar{e}_{j_n}$$

Рассмотрим выражение

$$(6.7.5) \quad f_{t \cdot k_1 \dots k_n}^{j_0 \dots j_n} = f_{k_1 \dots k_n \cdot s \cdot 0}^{n j_1} \dots f_{k_1 \dots k_n \cdot s \cdot n}^{n j_n}$$

В правой части подразумевается сумма тех слагаемых с индексом s , для которых перестановка σ_s совпадает. Каждая такая сумма будет иметь уникальный индекс t . Подставив в равенство (6.7.4) выражение (6.7.5) мы получим равенство (6.7.1). \square

ТЕОРЕМА 6.7.2. Пусть A - свободная конечно мерная ассоциативная алгебра над кольцом D . Пусть \bar{e} - базис алгебры A над кольцом D . Полилинейное отображение (6.6.4) можно представить в виде D -значной формы степени n над кольцом D ^{6.10}

$$(6.7.6) \quad f(a_1, \dots, a_n) = a_1^{i_1} \dots a_n^{i_n} f_{i_1 \dots i_n}$$

где

$$(6.7.7) \quad \begin{aligned} a_j &= \bar{e}_i a_j^i \\ f_{i_1 \dots i_n} &= f \circ (\bar{e}_{i_1}, \dots, \bar{e}_{i_n}) \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно определению 6.1.2 равенство (6.7.6) следует из цепочки равенств

$$f \circ (a_1, \dots, a_n) = f \circ (\bar{e}_{i_1} a_1^{i_1}, \dots, \bar{e}_{i_n} a_n^{i_n}) = a_1^{i_1} \dots a_n^{i_n} f \circ (\bar{e}_{i_1}, \dots, \bar{e}_{i_n})$$

Пусть \bar{e}' - другой базис. Пусть

$$(6.7.8) \quad \bar{e}'_i = \bar{e}_j h_i^j$$

преобразование, отображающее базис \bar{e} в базис \bar{e}' . Из равенств (6.7.8) и (6.7.7) следует

$$(6.7.9) \quad \begin{aligned} f'_{i_1 \dots i_n} &= f \circ (\bar{e}'_{i_1}, \dots, \bar{e}'_{i_n}) \\ &= f \circ (\bar{e}_{j_1} h_{i_1}^{j_1}, \dots, \bar{e}_{j_n} h_{i_n}^{j_n}) \\ &= h_{i_1}^{j_1} \dots h_{i_n}^{j_n} f \circ (\bar{e}_{j_1}, \dots, \bar{e}_{j_n}) \\ &= h_{i_1}^{j_1} \dots h_{i_n}^{j_n} f_{j_1 \dots j_n} \end{aligned}$$

□

Полилинейное отображение (6.6.4) **симметрично**, если

$$f \circ (a_1, \dots, a_n) = f \circ (\sigma(a_1), \dots, \sigma(a_n))$$

для любой перестановки σ множества $\{a_1, \dots, a_n\}$.

ТЕОРЕМА 6.7.3. Если полилинейное отображение f симметрично, то

$$(6.7.10) \quad f_{i_1, \dots, i_n} = f_{\sigma(i_1), \dots, \sigma(i_n)}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенство (6.7.10) следует из равенства

$$\begin{aligned} a_1^{i_1} \dots a_n^{i_n} f_{i_1 \dots i_n} &= f \circ (a_1, \dots, a_n) \\ &= f \circ (\sigma(a_1), \dots, \sigma(a_n)) \\ &= a_1^{i_1} \dots a_n^{i_n} f_{\sigma(i_1) \dots \sigma(i_n)} \end{aligned}$$

□

Полилинейное отображение (6.6.4) **косо симметрично**, если

$$f \circ (a_1, \dots, a_n) = |\sigma| f \circ (\sigma(a_1), \dots, \sigma(a_n))$$

^{6.10}Теорема доказана по аналогии с теоремой в [2], с. 107, 108

для любой перестановки σ множества $\{a_1, \dots, a_n\}$. Здесь

$$|\sigma| = \begin{cases} 1 & \text{перестановка } \sigma \text{ чётная} \\ -1 & \text{перестановка } \sigma \text{ нечётная} \end{cases}$$

ТЕОРЕМА 6.7.4. Если полилинейное отображение f косо симметрично, то

$$(6.7.11) \quad f_{i_1, \dots, i_n} = |\sigma| f_{\sigma(i_1), \dots, \sigma(i_n)}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенство (6.7.11) следует из равенства

$$\begin{aligned} a_1^{i_1} \dots a_n^{i_n} f_{i_1, \dots, i_n} &= f \circ (a_1, \dots, a_n) \\ &= |\sigma| f \circ (\sigma(a_1), \dots, \sigma(a_n)) \\ &= a_1^{i_1} \dots a_n^{i_n} |\sigma| f_{\sigma(i_1), \dots, \sigma(i_n)} \end{aligned}$$

□

ТЕОРЕМА 6.7.5. Пусть A - свободная конечно мерная ассоциативная алгебра над кольцом D . Пусть \bar{I} - базис алгебры $\mathcal{L}(D; A \rightarrow A)$. Пусть \bar{e} - базис алгебры A над кольцом D . Пусть полилинейное над кольцом D отображение f порождено набором отображений $(I_{k_1}, \dots, I_{k_n})$. Координаты отображения f и его компоненты относительно базиса \bar{e} удовлетворяют равенству

$$(6.7.12) \quad f_{l_1 \dots l_n} = f_{t \cdot k_1 \dots k_n}^{i_0 \dots i_n} I_{k_1 \cdot l_1}^{j_1} \dots I_{k_n \cdot l_n}^{j_n} C_{i_0 \sigma_t(j_1)}^{l_1} C_{k_1 i_1}^{l_1} \dots B_{l_{n-1} \sigma_t(j_n)}^{k_n} C_{k_n i_n}^{l_n} \bar{e}_{l_n}$$

$$(6.7.13) \quad f_{l_1 \dots l_n}^p = f_{t \cdot k_1 \dots k_n}^{i_0 \dots i_n} I_{k_1 \cdot l_1}^{j_1} \dots I_{k_n \cdot l_n}^{j_n} C_{i_0 \sigma_t(j_1)}^{l_1} C_{k_1 i_1}^{l_1} \dots C_{l_{n-1} \sigma_t(j_n)}^{k_n} C_{k_n i_n}^p$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В равенстве (6.7.1) положим

$$I_{k_i} \circ a_i = \bar{e}_{j_i} I_{k_i \cdot l_i}^{j_i} a_i^{l_i}$$

Тогда равенство (6.7.1) примет вид

$$\begin{aligned} (6.7.14) \quad f \circ (a_1, \dots, a_n) &= f_{t \cdot k_1 \dots k_n}^{i_0 \dots i_n} \bar{e}_{i_0} \sigma_t(a_1^{l_1} I_{k_1 \cdot l_1}^{j_1} \bar{e}_{j_1}) \bar{e}_{i_1} \dots \sigma_t(a_n^{l_n} I_{k_n \cdot l_n}^{j_n} \bar{e}_{j_n}) \bar{e}_{i_n} \\ &= a_1^{l_1} \dots a_n^{l_n} f_{t \cdot k_1 \dots k_n}^{i_0 \dots i_n} I_{k_1 \cdot l_1}^{j_1} \dots I_{k_n \cdot l_n}^{j_n} \bar{e}_{i_0} \sigma_t(\bar{e}_{j_1}) \bar{e}_{i_1} \dots \sigma_t(\bar{e}_{j_n}) \bar{e}_{i_n} \\ &= a_1^{l_1} \dots a_n^{l_n} f_{t \cdot k_1 \dots k_n}^{i_0 \dots i_n} I_{k_1 \cdot l_1}^{j_1} \dots I_{k_n \cdot l_n}^{j_n} C_{i_0 \sigma_t(j_1)}^{l_1} C_{k_1 i_1}^{l_1} \\ &\quad \dots C_{l_{n-1} \sigma_t(j_n)}^{k_n} C_{k_n i_n}^{l_n} \bar{e}_{l_n} \end{aligned}$$

Из равенства (6.7.6) следует

$$(6.7.15) \quad f \circ (a_1, \dots, a_n) = \bar{e}_p f_{i_1 \dots i_n}^p a_1^{i_1} \dots a_n^{i_n}$$

Равенство (6.7.12) следует из сравнения равенств (6.7.14) и (6.7.6). Равенство (6.7.13) следует из сравнения равенств (6.7.14) и (6.7.15). □

Список литературы

- [1] Серж Ленг, Алгебра, М. Мир, 1968
- [2] П. К. Рашевский, Риманова геометрия и тензорный анализ, М., Наука, 1967
- [3] Александр Клейн, Лекции по линейной алгебре над телом, eprint [arXiv:math.GM/0701238](#) (2010)
- [4] Александр Клейн, Представление универсальной алгебры, eprint [arXiv:0912.3315](#) (2010)
- [5] Александр Клейн, Линейные отображения свободной алгебры, eprint [arXiv:1003.1544](#) (2010)
- [6] Александр Клейн, Нормированная Ω -группа, eprint [arXiv:1305.4547](#) (2013)
- [7] Александр Клейн.
Линейная алгебра над телом: Векторное пространство.
CreateSpace Independent Publishing Platform, 2014;
ISBN-13: 978-1499323948
- [8] John C. Baez, The Octonions, eprint [arXiv:math.RA/0105155](#) (2002)
- [9] П. Кон, Универсальная алгебра, М., Мир, 1968
- [10] Richard D. Schafer, An Introduction to Nonassociative Algebras, Dover Publications, Inc., New York, 1995

Предметный указатель

- D -алгебра 53
- D -модуль 39
- абелева мультипликативная Ω -группа 24
- алгебра над кольцом 53
- ассоциативная D -алгебра 53
- ассоциатор D -алгебры 53
- базис алгебры $\mathcal{L}(A; A)$ 77
- базис векторного пространства 41
- базис модуля 42
- вектор, линейно зависимый от векторов 41
- декартово произведением Ω -алгебр 10
- закон ассоциативности 39
- закон дистрибутивности 39
- закон унитарности 39
- категория левосторонних представлений 13, 17
- коммутативная D -алгебра 53
- коммутатор D -алгебры 53
- компонента полилинейного отображения 84
- координаты 42
- левый сдвиг модуля 55
- линейная комбинация векторов 41
- линейно зависимые векторы 41
- линейно независимые векторы 41
- линейное отображение 42, 65
- линейный гомоморфизм 57
- матрица линейного гомоморфизма 58
- модуль над кольцом 39
- мультипликативная Ω -группа 24
- мультипликативное отображение 24
- невырожденный тензор 72
- орбита линейного отображения 72
- полилинейное косо симметричное отображение 87
- полилинейное отображение 45, 65
- полиморфизм представлений 21
- преобразование сопряжения 74
- приведенный полиморфизм представлений 22
- произведением объектов в категории 9
- прямое произведением Ω -алгебр 10
- свободная алгебра над кольцом 53
- свободный модуль над кольцом 42
- симметричное полилинейное отображение в ассоциативную алгебру 87
- стандартная компонента полилинейного отображения 86
- стандартная компонента тензора 51
- стандартное представление полилинейного отображения 86
- структурные константы 54
- сумма отображений 43, 45
- тензорная степень 31
- тензорное произведение 30, 50
- центр D -алгебры A 54
- эффективное представление кольца 39
- ядро D -алгебры A 54

Специальные символы и обозначения

(a, b, c) ассоциатор D -алгебры 53
 $[a, b]$ коммутатор D -алгебры 53
 $(A_2 \otimes A_2) \circ f$ орбита линейного отображения 72
 $B_1 \times \dots \times B_n$ произведением объектов B_1, \dots, B_n в категории \mathcal{A} 9
 $B^{\otimes n}$ тензорная степень представления 31
 C_{ij}^k структурные константы 54
 df произведение отображения на скаляр 44, 47
 $fs \cdot p^n$ компонента полилинейного отображения 84
 $f_{t \cdot k_1 \dots k_n}^{i_0 \dots i_n}$ стандартная компонента полилинейного отображения 86
 $a_{i_1 \dots i_n}^{i_1 \dots i_n}$ стандартная компонента тензора 51
 $f + g$ сумма отображений 43, 45
 I_k^l преобразование сопряжения 74
 $\mathcal{L}(D; A_1 \rightarrow A_2)$ множество линейных отображений 42, 65
 $\mathcal{L}(D; A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow S)$ множество полилинейных отображений 45, 65
 $\mathcal{L}(D; A^n \rightarrow S)$ множество n -линейных отображений 45, 65
 $N(A)$ ядро D -алгебры A 54
 $B_1 \otimes \dots \otimes B_n$ тензорное произведение 30
 $A_1 \otimes \dots \otimes A_n$ тензорное произведение 50
 $(\mathcal{A}_1 *) \mathcal{A}_2$ категория левосторонних представлений 13
 $(A_1 *) \mathcal{A}_2$ категория левосторонних представлений 17
 $c^i v_i$ линейная комбинация векторов 41
 $Z(A)$ центр D -алгебры A 54

$\prod_{i \in I} B_i$ произведением объектов $\{B_i, i \in I\}$ в категории \mathcal{A} 9
 $\prod_{i=1}^n B_i$ произведением объектов B_1, \dots, B_n в категории \mathcal{A} 9